

Compléments de mathématiques : Algèbre linéaire

Avant propos

Ce cours a été présenté à l'université de Perpignan Via Domitia en classe de Licence 3 dans les parcours physique-chimie et sciences pour l'ingénieur (parcours énergie-matériaux et électrotechnique et applications) au premier semestre de l'année 2023. Le volume du cours était de 15 heures de cours magistral, et un nombre égal de séances de travaux dirigés.

La difficulté principale lors de l'élaboration de ce cours a été la très forte hétérogénéité, à la fois en termes de niveau, mais surtout d'attentes des élèves de ces différentes formations vis-à-vis de l'enseignement dispensé. Ainsi, le choix qui a été retenu a consisté à dispenser un cours de nature plutôt fondamentale, dispensant aux élèves en ayant besoin les bons mots-clés pour les aiguiller dans la suite de leur parcours, combiné avec des exigences plus tournées vers l'application des concepts clés du cours (voir le bilan des compétences exigibles en fin de document). De cette manière, il est possible de suivre ce cours en laissant de côté ses applications les plus abstraites pour s'appuyer sur les nombreux exemples d'application afin de construire son savoir faire dans la matière en question. Les notions étiquetées à l'aide d'une étoile bleue ★ sont des notions dont la définition n'est pas à apprendre par cœur, mais qu'il faut savoir manipuler dans des cas concrets une fois la définition rappelée.

Parmi les étudiants ayant suivi ce cours, certains n'avaient jamais suivi au par avant de cours d'algèbre linéaire. Ce cours reprend donc les choses depuis les bases, et peut être lu et utilisé sans pré-requis.

Concernant les travaux dirigés, la feuille numéro 3 et les trois premiers exercices de la feuille numéro 4 sont résolus par les étudiants en autonomie, seuls les résultats finaux sont exposés au tableau.

Cours n°1 : Des vecteurs aux matrices

I] Rappels sur les vecteurs

Pour commencer ce cours, rappelons quelques notions simples de mathématiques qui doivent être maîtrisées afin de comprendre le cours. Tout d'abord, rappelons la signification des symboles suivants :

- $\forall$: « pour tout élément » tel que ...
- $\exists$: « il existe un élément » tel que ...
- $\exists!$: « il existe un et un seul élément » tel que ...

- $\Rightarrow$: élément « implique » propriété ...
- $\Leftrightarrow$: élément 1 « est équivalent à » élément 2

Les nombres réels¹ seuls sont appelés *scalaires*. Cependant, en physique par exemple, il est parfois utile d'étudier des objets qui sont des **combinaisons de scalaires**. Ces objets, appelés *vecteurs* peuvent être représentés de différentes façons :

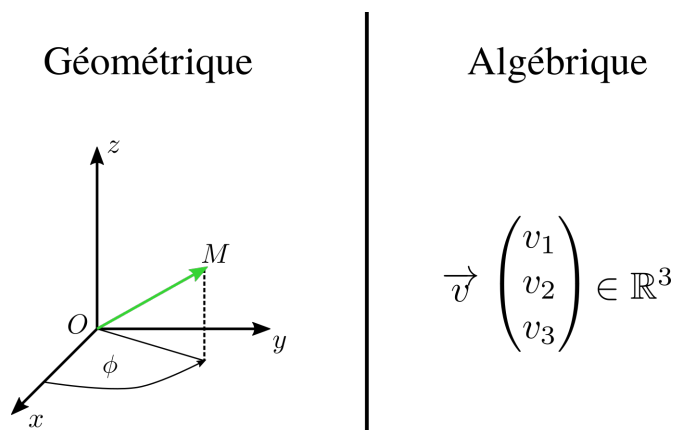


FIGURE 1 – Deux représentations d'un vecteur.

Les deux représentations, géométrique et algébrique, sont totalement équivalentes.

Les vecteurs sont des objets omniprésents dans les lois de la physique.

■ Exemples : Principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m \vec{a}$, loi de Maxwell-Faraday
 $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \dots$

Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous écrirons les vecteurs sans flèche, sauf dans les cas ambigus.

Comment définir une structure mathématique permettant de traiter les vecteurs et les opérations associées ?

II] Espaces vectoriels

★ On appelle *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ ² un ensemble E ayant les propriétés suivantes :

1. Dans la suite, à moins que cela ne soit explicitement signifié, l'espace vectoriel de travail est défini sur le corps des nombres réels, dans un souci de rendre les moins abstraites possibles les structures étudiées ; mais tous les développements présentés se transposent sans problème aux nombres complexes.

2. ou sur $\mathbb{C}$.

- il possède une *loi de composition interne* (qui compose un **vecteur** avec un **vecteur**), notée « $+$ » vérifiant :
 - *commutativité* : $\forall a, b \in E, a + b = b + a$
 - *associativité* : $\forall a, b, c \in E, (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
 - *existence d'un élément neutre* : $\exists 0 \in E : a + 0 = 0 + a = a$
 - *existence d'un inverse* : $\forall a \in E, \exists a^{-1} \in E : a^{-1} + a = 0$
- il possède une *loi de composition externe* (qui compose un **vecteur** avec un **scalaire**), notée « $\cdot$ » vérifiant :
 - *distributivité sur l'addition* : $\forall a, b \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$
 - *distributivité de l'addition des réels sur $\cdot$* : $\forall a \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$
 Notons qu'ici « $+$ » dénote la loi d'addition sur $\mathbb{R}$, et non entre vecteurs de E (la notation se justifie car $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ce qui veut dire que les scalaires peuvent être pensés comme des vecteurs d'un espace particulier).
 - *distributivité de la multiplication des scalaires sur $\cdot$* : $\forall a \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda \mu) \cdot a = \lambda(\mu \cdot a) = \mu(\lambda \cdot a)$
 - *existence d'un élément neutre* : $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in E, 1 \cdot a = a$

Pour que les lois ci-dessus soient des lois de composition, il est nécessaire que le vecteur résultant soit un élément de l'espace de départ E .

■ Exemple : $E = \mathbb{R}^2$.

La loi d'addition est la loi d'addition habituelle sur les vecteurs :

$$+ : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] \mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

La loi de composition externe est la loi d'homothétie habituelle :

$$\cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$\left[\lambda, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] \mapsto \lambda \cdot y = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que ces lois ont les propriétés énoncées ci-dessus, qu'elle héritent des lois d'addition et de multiplication sur l'ensemble des nombres réels.

De manière générale, pour toutes les valeurs entières de n , $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

► Définition : F est un *sous-espace vectoriel* de $(E, +, \cdot)$ si :

- $F \subseteq E$;
- $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

En particulier, le second point de la définition impose que F soit stable sous l'action de $+$ et de $\cdot$.

■ Exemple :

- Soit $E = \mathbb{R}^3$. E est un espace vectoriel correspondant à l'espace physique habituel. Dans cet espace, il n'est pas difficile de montrer que $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de E . Cette propriété s'étend à tous les plans de l'espace passant par l'origine (l'élément neutre de la loi d'addition doit être présent dans l'ensemble considéré). De la même façon, $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, de même que toutes les droites contenues dans $\mathbb{R}^2$ et passant par l'origine. Enfin, $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{R}^3$.
- Tous les plans de l'espace sont des espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, à condition que ceux-ci passent par l'origine. En effet, si 0 n'est pas dans l'espace choisi, alors la loi $+$ n'a plus d'élément neutre. ★ Un tel plan est alors un espace dit *affine*, car il peut être décrit comme la somme d'un vecteur particulier et d'un espace vectoriel. Dans la représentation géométrique des espaces vectoriels, il s'agit de la généralisation naturelle de la notion de droite affine.

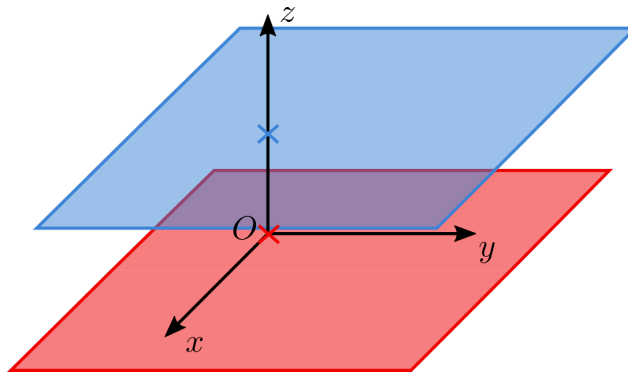


FIGURE 2 – Le plan (xOy) est un espace vectoriel. En revanche, le plan bleu, qui ne passe pas par O n'est pas un espace vectoriel car sa loi $+$ n'admet pas d'élément neutre.

- La boule unité n'est pas un espace vectoriel. En effet, la somme de deux de ses vecteurs peut avoir une norme supérieure à 1 et se trouver en dehors de la boule ; elle n'est stable ni sous $+$, ni sous $\cdot$. De manière générale, pour les espaces vectoriels admettant une représentation géométrique, nous pouvons retenir qu'à l'exception du singleton $\{0\}$, tous les espaces vectoriels ont « une taille infinie » (nous n'avons pas encore défini les objets pour pouvoir donner un sens rigoureux à cette affirmation, mais nous pouvons retenir cette heuristique en attendant).

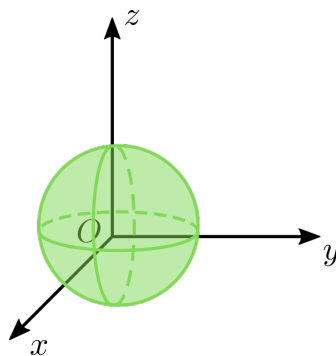


FIGURE 3 – La boule unité n'est pas un espace vectoriel.

Pour résumer, nous avons jusqu'à présent défini la notion d'espace vectoriel, dont nous allons voir qu'elle est la « bonne » structure pour effectuer des opérations sur les vecteurs. Les vecteurs habituels, tels que ceux représentés sur la Figure 1 sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, qui sont bien tous des espaces vectoriels.

III] Représentations d'un vecteur

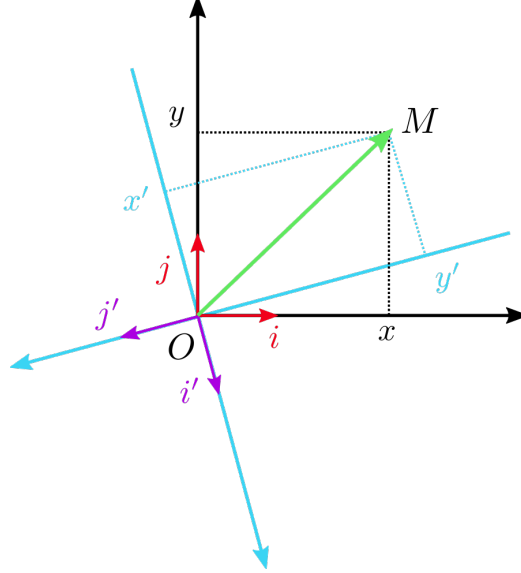


FIGURE 4 – Représentations du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans deux bases différentes.

Examinons la figure 4. Sur celle-ci, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est décomposé dans deux bases différentes $\{i, j\}$ et $\{i', j'\}$. Il apparaît clairement que les coordonnées de ce vecteur dans ces deux bases sont différentes (par exemple, $x > 0$ et $x' < 0$). Comment bien caractériser un vecteur ?

1) Familles de vecteurs

Soient $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ n scalaires, et $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ n vecteurs de E .

► Définition : La famille de vecteurs $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est appelée *famille libre* de vecteurs si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = 0 \right) \Leftrightarrow (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0). \quad (3)$$

► Définition : La famille de vecteurs $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est dite *famille liée* de vecteurs si et seulement si :

$$\exists \{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n} : \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = 0 \right) \text{ et } \exists i_0 : \lambda_{i_0} \neq 0 \right]. \quad (4)$$

Dans ce dernier cas, il est possible d'exprimer l'un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres :

$$v_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \left(\sum_{i \neq i_0}^n \lambda_i \cdot v_i \right). \quad (5)$$

► Définition : La famille de vecteurs $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est dite *génératrice* de E si et seulement si :

$$\forall a \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : a = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i. \quad (6)$$

L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs est noté :

$$\text{Vect}[(v_i)_{1 \leq i \leq n}]. \quad (7)$$

■ Exemple :

La famille $\{e_x, e_y\}$ est une famille libre. Elle est génératrice du plan $\mathbb{R}^2$. En revanche, elle n'est pas génératrice de l'espace $\mathbb{R}^3$, puisque le vecteur e_z par exemple ne peut s'exprimer en combinant e_x et e_y .

La famille $\{e_x + e_y, e_x - e_z, e_y + e_z\}$ est une famille liée de l'espace.

► Définitions : Une famille libre et génératrice d'un espace vectoriel est une *base* de cet espace. Si une base contient n vecteurs, alors n est unique, et s'appelle la *dimension* de E ³. Dans ce cas, on notera :

$$\dim(E) = n. \quad (8)$$

♦ Théorème : Toute famille de vecteurs contenant $m > n$ vecteurs est nécessairement liée.

♦ Théorème : Toute famille liée de n vecteurs dans un espace de dimension n ne peut être génératrice.

Les démonstrations de ces théorèmes sont simples, mais laissées en exercice. Les élèves ayant des difficultés à les démontrer sont invités à prendre le temps de bien comprendre les exemples d'application suivants.

■ Exemples :

- La famille $\{e_x, e_y\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
- La famille $\{e_y + e_z, e_y - e_z\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$. C'est donc aussi une base de $\mathbb{R}^2$.
- La famille $\{e_x + e_y, 2 \cdot e_x - \sin(9) \cdot e_y, \pi \cdot e_x + \cos(3) \cdot e_y\}$ contient trois vecteurs, soit un vecteur de plus que la dimension de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une famille liée de $\mathbb{R}^2$. Cette famille est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ (tout vecteur du plan peut s'exprimer en fonction de ces trois vecteurs), mais ce n'est pas une base de cet ensemble. Cette famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, elle n'est donc pas non plus une base de l'espace.
- La famille $\{e_x, e_x + 2 \cdot e_y, e_x + 2 \cdot e_y + 3 \cdot e_z\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, elle constitue donc une base de l'espace, et nous avons donc $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Cela est bien compatible avec ce que nous pouvons déduire de la base canonique de l'espace $\{e_x, e_y, e_z\}$. De manière générale,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n. \quad (9)$$

3. Sauf mention explicite du contraire, ce cours d'introduction s'intéresse uniquement aux espaces vectoriels de dimension finie.

- La famille $\{e_x - e_y, e_y - e_z, e_z - e_x\}$ est une famille liée de l'espace $\mathbb{R}^3$. Ce n'est donc pas une base de l'espace en dépit du fait qu'elle contienne autant de vecteurs que sa dimension.

2) Somme directe d'espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

► Définition : F et G sont en *somme directe* dans E si et seulement si :

$$\forall a \in E, \exists ! (b, c) : \begin{cases} a = b + c \\ b \in F \\ c \in G \end{cases} \quad (10)$$

Dans ce cas, on notera $E = F \oplus G$.

► Définition : Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de $E = F \oplus G$, et $f = \dim(F)$, de sorte que $\{e_i\}_{1 \leq i \leq f}$ soit une base de F . Alors $\{e_i\}_{f+1 \leq i \leq n}$ est une base de G , et la base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est dite *adaptée* à la décomposition de E en somme directe de F et G .

■ Exemple : La base canonique de $\mathbb{R}^3$ peut se décomposer en une base du plan (xOy) et une droite dirigée par vecteur donnant l'altitude e_z . Nous pouvons donc écrire $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, et $\{e_x, e_y, e_z\}$ est une base adaptée à cette décomposition.

Notons que de la même manière, $\{e_z, e_y, e_x\}$ est également une base adaptée dans la mesure où $\text{Vect}[(e_z, e_y)] = \mathbb{R}^2$.

Cette décomposition peut également être écrite $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

La base $\{e_x - e_y, e_x + e_y, e_z\}$ est également adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, puisque les deux premiers vecteurs forment bien une base de $\mathbb{R}^2$, et le troisième vecteur n'appartient pas à $\text{Vect}[(e_x - e_y, e_x + e_y)]$. La base $\{e_x - e_y, e_x + e_y, e_z + e_y\}$, bien que mélangeant les vecteurs du plan (xOy) et de l'axe z est tout de même une base adaptée car : (i) la décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans cette base est unique, et (ii) $\text{Vect}(e_z + e_y) = \mathbb{R}$.

Tant que nous ne précisons pas plus en détail à quoi peuvent correspondre géométriquement les sous-espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, toute base de $\mathbb{R}^3$ ne peut être qu'une base adaptée à la décomposition en somme directe. Ce résultat peut être intéressant à montrer pour vérifier si l'on maîtrise les notions du cours abordées jusqu'à maintenant.

3) Changements de base

Revenons au problème posé au début de cette section. Nous avons établi que les coordonnées d'un vecteur ne sont pas uniques ; en revanche, la combinaison **coordonnées** + **base** est unique. Ainsi, un vecteur peut être caractérisé par un ensemble de coordonnées et de bases,

qui sont reliées les unes aux autres. Nous allons maintenant nous concentrer sur les liens entre coordonnées des vecteurs dans différentes bases possibles.

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de E , et a un vecteur de coordonnées $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ dans cette base.

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i .$$

Considérons à présent les coordonnées du même vecteur a dans une autre base $\{e'_i\}_{1 \leq i \leq n}$:

$$a = \sum_{i=1}^n a'_i \cdot e'_i .$$

Soient $\{(e'_i)_j\}_{1 \leq j \leq n}$ les coordonnées de e'_i dans $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n a'_i \cdot e'_i \\ &= \sum_{i=1}^n a'_i \sum_{j=1}^n (e'_i)_j \cdot e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n a'_i (e'_i)_j \right] \cdot e_j , \end{aligned}$$

soit, par unicité de la décomposition dans une base,

$$a_j = \sum_{i=1}^n (e'_i)_j a'_i \quad (11)$$

Il apparaît donc que le passage d'un jeu de coordonnées à un autre se fasse à l'aide d'un objet pouvant être représenté par un ensemble de nombre à deux indices, qui sont donc représentées sous forme de tableaux appelés *matrices*. Dans le cas particulier traité ici, nous pouvons définir une *matrice de changement de base* $\mathcal{E}$, telle que l'élément présent sur la ligne i et la colonne j soit $\mathcal{E}_{ij} = (e'_i)_j$, ou

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \dots & \mathcal{E}_{1n} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \dots & \mathcal{E}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{E}_{n1} & \mathcal{E}_{n2} & \dots & \mathcal{E}_{nn} \end{pmatrix} . \quad (12)$$

Il est alors utile de représenter les vecteurs sous forme de colonnes :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} , \quad (13)$$

de sorte que le changement de base puisse se re-écrire :

$$a = \mathcal{E} \cdot a' = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \dots & \mathcal{E}_{1n} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \dots & \mathcal{E}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{E}_{n1} & \mathcal{E}_{n2} & \dots & \mathcal{E}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \dots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (e'_i)_1 a'_i \\ \sum_{i=1}^n (e'_i)_2 a'_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n (e'_i)_n a'_i \end{pmatrix} . \quad (14)$$

Il est d'usage d'utiliser le symbole « $\cdot$ » pour la loi de composition entre une matrice et un vecteur. En principe, le contexte empêche toute confusion avec la loi de composition externe.

La notation matricielle permet de représenter de manière compacte un ensemble d'opérations (toutes les sommes sur chaque ligne du vecteur résultat) en représentant l'ensemble des nombres utilisés dans un tableau. Cette notation permet de simplifier grandement l'écriture et la réalisation de calculs en supprimant les trop nombreuses sommes. Cela est particulièrement utile dans le cas d'une opération de changement de base par exemple (voir TD n°1).

IV] Conclusions

Dans ce premier cours, nous avons introduit la notion d'espace vectoriel, qui constitue la structure mathématique adaptée au calcul mettant en jeu des vecteurs. Nous avons montré qu'une bonne façon d'analyser la structure interne d'un tel ensemble passe par l'introduction de bases, dans lesquelles la décomposition d'un vecteur est unique. Enfin, nous avons illustré comment l'introduction de matrices permet de simplifier grandement une partie des opérations réalisées sur les vecteurs, qui mettent souvent en jeu de nombreuses coordonnées de manière répétitives. Dans la suite de ce cours, nous allons nous intéresser plus en détails aux propriétés de ces matrices, et des espaces mathématiques dans lesquels leur représentation est utile.

Cours n°2 : Opérations sur les matrices

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion d'*espace vectoriel* comme structure naturelle pour manipuler des vecteurs. Nous allons dévoiler au fur et à mesure de ce cours que la notion de *vecteur*, tout comme la notion d'*espace vectoriel*, a en réalité un spectre d'application beaucoup plus large que sa simple représentation géométrique dans l'espace utilisée en physique. Par exemple, nous allons montrer que les matrices elles mêmes correspondent à des « vecteurs » d'un espace particulier, et que toutes les structures exposées dans le chapitre précédent nous permettent de définir et comprendre les opérations de base sur les espaces matriciels.

I] $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ comme un espace vectoriel

1) Définitions

► **Définition :** $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$) est l'ensemble des matrices à n lignes, m colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$)⁴.

■ **Exemples :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$$

4. En réalité, il est possible de travailler avec des espaces plus généraux, mais dans le cadre de ce cours d'introduction à l'algèbre linéaire, nous préférons laisser de côté ces subtilités pour se concentrer sur les cas les plus fréquemment rencontrés en physique et sciences pour l'ingénieur.

(R) Un vecteur est un élément de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. La notion de matrice est donc le prolongement naturel de celle de vecteur.

■ Exemple :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

(R) Un cas particulièrement utile et répandu est celui des matrices carrées, de l'ensemble $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Loi d'addition sur $\mathcal{M}_{nm}(\mathcal{R})$

La loi d'addition sur les matrices est définie de la façon suivante :

$$+ : \quad (A, B) \quad \rightarrow \quad A + B$$

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2n} + B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} & \dots & A_{nn} + B_{nn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Cette loi pourra également être écrite de la façon suivante :

$$C = A + B \Leftrightarrow [C_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]. \quad (16)$$

■ Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}.$$

(R) La loi d'addition est définie sur chaque espace de type $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ **séparément**, autrement dit, elle ne donne un sens qu'à l'addition de matrices de **la même taille**.

• Propriétés :

- + est associative.
- + est commutative.
- + admet un élément neutre :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

→ Toute matrice admet un inverse, qui est une matrice de même taille :

$$M^{-1} = [-M_{ij}].$$

$(\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R}), +)$ est donc un groupe commutatif.

3) Loi de composition externe sur $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$

Les matrices se composent avec les scalaires de la manière suivante :

$$\cdot : (\lambda, M) \mapsto \lambda \cdot M = [\lambda M_{ij}] \quad (17)$$

■ Exemples :

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 35 & 45 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix}.$$

La loi de composition externe est bien distributive sur l'addition matricielle :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (A + B) &= [\lambda(A_{ij} + B_{ij})] \\ &= [\lambda A_{ij} + \lambda B_{ij}] \\ &= [\lambda A_{ij}] + [\lambda B_{ij}] \\ &= \lambda \cdot A + \lambda \cdot B. \end{aligned} \quad (18)$$

Il n'est pas difficile de vérifier de la même façon que :

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A, \quad (19)$$

ou encore,

$$(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) = \mu \cdot (\lambda \cdot B). \quad (20)$$

En conclusion,

$(\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Cela veut notamment dire que toutes les structures développées pour le calcul vectoriel s'appliquent de la même façon aux matrices.

4) Structure de $(\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Une base de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ est donnée par la famille de matrices

$$\{\mathcal{E}_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, \mathcal{E}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j}\}, \quad (21)$$

où les δ_{ij} sont les symboles de Kronecker.

■ Exemple : Une base de $M_{23}(\mathbb{R})$ est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

♦ Corollaire : La dimension de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ est $n \times m$.

► Définition : On appelle matrice *triangulaire supérieure* (respectivement *triangulaire inférieure*), dans l'ensemble noté $\mathcal{T}_n^+$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-$) une matrice **carrée** dont les éléments sous-diagonaux (respectivement sur-diagonaux) sont nuls.

■ Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+ \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^- \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+ \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^- \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \notin \mathcal{T}_n^+ \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{T}_n^- \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^-$$

Quelle est la dimension de espaces? Le nombre de coefficients non nuls par ligne d'une matrice de $\mathcal{T}_n^+$ (ou $\mathcal{T}_n^-$) est une série arithmétique de n coefficients dont le premier vaut 1. Par conséquent,

$$\dim(\mathcal{T}_n^+) = \dim(\mathcal{T}_n^-) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (22)$$

► Définition : On appelle matrice *diagonale*, dans l'ensemble noté $\mathcal{D}_n^+$, une matrice **carrée** dont seuls les éléments diagonaux sont non nuls. Il en est un cas particulier.

■ Exemples :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$$

$$\textcircled{\mathbf{R}} \quad \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}).$$

► Définitions :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *symétrique* si et seulement si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_{ij} = A_{ji}. \quad (23)$$

L'ensemble des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *antisymétrique* si et seulement si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_{ij} = -A_{ji}. \quad (24)$$

L'ensemble des matrices antisymétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Grâce au travail effectué sur les matrices triangulaires, il n'est pas difficile d'établir que :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (25)$$

♦ Théorème : Toute matrice carrée se décompose de manière unique sous la forme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Concrètement, cette décomposition prend la forme :

$$A_{ij} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} + \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2}, \quad (26)$$

dont il n'est pas difficile de montrer que les deux termes du membre de droite respectent les propriétés requises.

La démonstration de l'unicité, n'est pas non plus très difficile (un bon exercice consiste à essayer avant de lire la réponse). Soient $a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, A_{ij} = a_{ij} + s_{ij}, \quad (27)$$

alors nécessairement,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, A_{ij} + A_{ji} = 2a_{ij}, \quad A_{ij} - A_{ji} = 2s_{ij}. \quad (28)$$

D'après ce qui précède,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}). \quad (29)$$

Nous pouvons vérifier que cette décomposition est compatible avec les dimensions des espaces concernés :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2. \end{aligned} \quad (30)$$

II] Loi de multiplication sur les espaces matriciels

1) Définition

Nous avons déjà défini comment composer une matrice avec un vecteur colonne. De plus, nous avons établi que les vecteurs colonnes ne sont qu'un cas particulier de matrices, ce qui permet de généraliser cette loi de composition en une loi de multiplication plus générale, agissant a priori sur des matrices rectangulaires. En termes de notation, nous suivrons la notation habituelle qui consiste à représenter les compositions par des symbole $\cdot$.

► Définition : Soient $A \in \mathcal{M}_{n\textcolor{red}{m}}(\mathbb{R})$, et $B \in \mathcal{M}_{\textcolor{red}{m}p}(\mathbb{R})$. La loi de multiplication entre A et B est définie par :

$$\begin{aligned} \cdot : (A, B) &\mapsto C = A \cdot B \\ ([A_{ij}], [B_{ij}]) &\mapsto \left[C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Notons que pour que la somme soit définie, il est impératif que le nombre de **colonnes** de A soit égal au nombre de **lignes** de B .

■ Exemples : Grâce à la définition ci-dessus, nous pouvons composer des matrices rectangulaires,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

des matrices carrées,

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

des matrices avec des vecteurs colonnes,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

des matrices avec des vecteurs ligne,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et des vecteurs lignes avec des vecteurs colonnes.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que si V est un vecteur colonne, W un vecteur ligne, et M une matrice adaptée aux tailles de V et W , alors $W \cdot M \cdot V$ est toujours un scalaire.

2) Propriétés de la loi de multiplication

Propriétés :

- $\cdot$ est associative (démonstration en exercice).
- $\cdot$ admet un élément neutre, appelé *matrice identité*, noté $\mathbb{I}$ et tel que :

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

- **Certaines** matrices possèdent un inverse vis-à-vis de la loi de multiplication ($\mathbb{I}$ par exemple), mais de nombreuses matrices non nulles ne sont pas inversibles. Les matrices ne peuvent donc pas être manipulées comme des nombres réels.
- L'ensemble des matrices inversibles est appelé *groupe linéaire de dimension n* , et noté $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$. ★ $(\mathcal{G}_n(\mathbb{R}), \times, \cdot)$ est un groupe (exceptionnellement, la loi de multiplication a été notée « $\times$ » pour éviter toute confusion avec la loi de composition externe).

Ⓐ De par les propriétés de la loi de multiplication,

$$A \text{ inversible} \Rightarrow A \text{ carrée}. \quad (33)$$

- La multiplication matricielle **n'est pas commutative**, en général $A \cdot B \neq B \cdot A$.

■ Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A \cdot B$$

L'opérateur :

$$[\cdot, \cdot] : (A, B) \mapsto A \cdot B - B \cdot A \quad (34)$$

appelée *commutateur* de A et B ne vaut zéro que sur les ensembles de matrices commutant entre elles. C'est donc le bon opérateur pour examiner le comportement d'un ensemble de matrices vis-à-vis de la multiplication. Nous verrons des exemples concrets dans la suite du cours.

La non commutativité de la multiplication matricielle entraîne un besoin de soin particulier dans l'application de formules habituelles sur les scalaires telles que celle du binôme de Newton :

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2. \quad (35)$$

- Les matrices de **changement de base** sont **inversibles**.

L'effet de la matrice de changement de base P sur le vecteur V est :

$$P : V \mapsto P \cdot V. \quad (36)$$

Nous pouvons alors en déduire la loi de changement de base pour une matrice carrée M en utilisant le fait que $M \cdot V$ est un vecteur :

$$\begin{aligned} (M \cdot V) &\mapsto P \cdot (M \cdot V) \\ &= P \cdot M \cdot V \quad (\text{associativité de } \cdot) \\ &= P \cdot M \cdot \mathbb{I} \cdot V \quad (\mathbb{I} \text{ est l'élément neutre}) \\ &= P \cdot M P^{-1} \cdot P \cdot V \quad (P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})) \\ &= (P \cdot M \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot V) \quad (\text{associativité de } \cdot) \end{aligned} \quad (37)$$

Dans la dernière égalité, nous retrouvons l'expression du vecteur V dans la nouvelle base, et en déduisons donc :

$$\boxed{P : M \mapsto P \cdot M \cdot P^{-1}}. \quad (38)$$

Deux matrices reliées entre elles par une telle transformation sont dites *semblables*.

★ Pour les vecteurs, nous avons remarqué que la représentation *géométrique* correspond à un seul et unique objet, pouvant être représenté par une flèche dans l'espace ; alors que la représentation *algébrique* correspond à une infinité de couples (base, coordonnées). Nous pouvons alors définir un vecteur comme une *classe d'équivalence*⁵ comprenant toutes

5. Afin de ne pas alourdir le cours, la définition de la classe d'équivalence n'est pas donnée ici. Le lecteur intéressé la trouvera dans tout bon livre d'introduction à l'algèbre.

les matrices colonnes reliées entre elles par une matrice de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ (correspondant à un changement de base).

De la même manière, il peut être intéressant de penser les matrices, non pas comme des tableaux de nombres, mais comme des objets dont la représentation en tableau ne correspond qu'à un élément d'une classe d'équivalence comprenant les matrices reliées entre elles par une relation de type (38).

- Propriété :

$$(A, B) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})^2 \Rightarrow [A, B] = 0. \quad (39)$$

Cette propriété est particulièrement utile pour calculer les puissances d'une matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Rappelons qu'à cause de la non commutativité de la loi de multiplication matricielle, cette formule **ne se généralise pas** à des matrices quelconques. En pratique, les puissances successives d'une matrice ne peuvent se calculer que dans certains cas particuliers, où les coefficients induisent une relation de récurrence entre les différentes puissances par exemple.

3) Propriétés des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

► Définition : La *transposition* est la transformation opérant une symétrie des coefficients de la matrice par rapport à sa diagonale :

$$^T. : A \mapsto [^T A_{ij}] = [A_{ji}]. \quad (41)$$

La transposition est involutive :

$$^T(^T A) = A. \quad (42)$$

- Propriété :

$$^T(A \cdot B \cdot C) = ^T C \cdot ^T B \cdot ^T A. \quad (43)$$

La démonstration de cette propriété est laissée en exercice.

• Propriété (★) : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices invariantes sous l'action de $^T.$ $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices pour lesquelles $A + ^T A = 0$.

► Définition : La *trace* d'une matrice est définie par l'opérateur suivant :

$$\text{Tr} : A \mapsto \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (44)$$

■ Exemples :

$$\text{Tr}(\mathbb{I}) = n \quad , \quad \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \text{Tr} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 14.$$

Propriétés :

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}({}^T A) = \text{Tr}(A)$.
- $\forall A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(A \cdot B \cdot C \cdot D) = \text{Tr}(B \cdot C \cdot D \cdot A) = \text{Tr}(C \cdot D \cdot A \cdot B) = \text{Tr}(D \cdot A \cdot B \cdot C)$.

En particulier, $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \text{Tr}(A)$. ★ La trace est donc un invariant de la classe d'équivalence correspondant à un ensemble de matrice semblables. C'est donc une caractéristique de l'objet matriciel « géométrique », ce qui lui donne une interprétation plus fondamentale que l'écriture « algébrique » de la matrice dans une base donnée.

Les démonstrations de ces propriétés sont laissées en exercice.

► Définition : Une matrice A est dite *nilpotente* si et seulement si :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : A^n = 0. \quad (45)$$

■ Exemples :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le concept de matrice nilpotente est intéressant pour aider au calcul de puissances d'ordre élevées d'une matrice, comme par exemple lors d'un calcul d'*exponentielle matricielle*. Par analogie avec les nombres réels, l'exponentielle d'une matrice A est définie par la série suivante :

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}. \quad (46)$$

Des exemples sont traités dans les feuilles de TD.

Dans le cas où l'espace vectoriel E se décompose en une **somme directe** $E = F \oplus G$, alors **dans une base adaptée** à cette décomposition, la matrice A peut s'écrire sous forme de blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right). \quad (47)$$

Les blocs peuvent alors être manipulés comme des coefficients scalaires : il est possible de faire de produits par blocs notamment. Il s'agit d'un exemple illustrant qu'à l'égard des vecteurs, les calculs matriciels sont d'autant plus simples à mener qu'ils sont effectués dans une base bien choisie. L'écriture par blocs est un outil particulièrement puissant dans le cas où l'un, ou plusieurs, des blocs sont diagonaux (ou multiples de l'identité), ou nilpotents.

► Définition : Le *rang* d'une matrice, noté $\text{rank}(\cdot)$, est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de celle-ci.

III] Conclusions

Les matrices forment un prolongement naturel de la notion de vecteurs. Cela se comprend bien si l'on identifie $(\mathcal{M}_{nm}(\mathcal{R}), +, \cdot)$ à un espace vectoriel : en réalité, les espaces de matrices ont une structure commune avec celle des vecteurs, ce qui explique les nombreuses analogies entre calcul vectoriel et matriciel.

La multiplication matricielle est plus subtile que la multiplication scalaire. Notamment, nous devons faire attention au fait que cette loi n'est pas commutative, ce qui rend fausses certaines égalités habituelles (comme le binôme de Newton par exemple).

Tous ces outils sont très utiles en physique et en sciences pour l'ingénieur où les matrices sont omniprésentes. Une illustration particulièrement bien connue, la résolution de systèmes linéaires, est présentée dans le chapitre suivant.

Cours n°3 : Résolution de systèmes d'équations linéaires

Ce cours a pour objectif de savoir résoudre les *systèmes d'équations linéaires*, c'est à dire les équations pouvant se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (48)$$

ou encore, d'après ce que nous avons appris dans les chapitres précédents, $A \cdot X = B$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la *matrice associée au système linéaire*, $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur inconnu, et $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur second membre. La mise de l'équation sous cette dernière forme va nous permettre de mettre à profit nos connaissances sur les matrices pour résoudre le système linéaire associé.

I] Pivot de Gauss

1) Considérations générales

◆ Théorème : L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène $A \cdot X = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

♦ Théorème : L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation avec second membre $A \cdot X = B$ est :

- soit vide.
- soit un espace *affine*, c'est à dire que chacun de ses éléments peut être développé en la somme d'un élément de $\mathcal{S}_H$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

2) Pivot de Gauss — théorie

Le but du pivot de Gauss est de *trigonaliser* le système, c'est à dire à le ramener sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ 0 \quad + a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \dots \\ 0 + \dots + a'_{kk} x_1 + \dots + a'_{kn} x_n = b'_k \\ \qquad \qquad \qquad 0 = b'_{k+1} \\ \dots \\ \qquad \qquad \qquad 0 = b'_n \end{array} \right. \quad (49)$$

avec les deux types de contraintes suivantes :

- $\forall k < m \leq n, b'_m = 0$.
- $\prod_{i=1}^k a'_{ii} \neq 0$.

Si au moins une de ces deux conditions n'est pas respectée, alors $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

Sinon il est possible de paramétrer les k *inconnues principales* $(x_1, \dots, x_k)$ en fonction des des $n - k$ *inconnues secondaires* $(x_{k+1}, \dots, x_n)$. $\mathcal{S}$ est alors un espace affine de dimension $n - k$.

(R) Si $n = k$, alors $\mathcal{S}$ est un espace affine de dimension 0, c'est à dire $\mathcal{S} = \{0\} + V$, où V est un vecteur solution particulière du système d'équation. Cela correspond donc au cas où la solution est unique.

■ Exemples :

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad \qquad - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 1 \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 1 \\ \qquad \qquad 9x_3 = -5 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ L'_2 \\ L_3 - 5L'_2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 4/9 \\ -1/9 \\ -5/9 \end{pmatrix} \right\} \quad (53)$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 7x_1 & + & x_3 & = & 0 & (L_1) \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 & = & 0 & (L_2) \end{cases} \quad (54)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 & + & 7x_1 & = & 0 & (L_1) \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 & = & 0 & (L_2) \end{cases} \quad (55)$$

Dans ce cas, $n = 4$, $k = 2$. $\mathcal{S}$ est donc un *plan vectoriel*, $\dim(\mathcal{S}) = 2$. Il faut donc paramétrer l'espace des solutions avec deux nombres réels. Par exemple,

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} s - t/2 \\ s \\ 7/2t - 7s \\ t \end{pmatrix} \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (56)$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 2x - y + z + 3t = 5 & (L_1) \\ x + 2y + z - t = 3 & (L_2) \\ x - 2y - 2t = -3 & (L_3) \\ 3x + 2y + 2z - 4t = 3 & (L_4) \end{cases} \quad (57)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z - t = 3 & (L_2) \\ -5y - z + t = -1 & (L_2 - L_1) \\ -4y - z - t = -6 & (L_3 - L_2) \\ -4y - z - t = -6 & (L_4 - 3L_2) \end{cases} \quad (58)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z + 2y - t = 3 & (L'_1) \\ & z + 4y + t = 6 & (-L'_3) \\ & & y - 6t = -5 & (L'_3 - L'_2) \\ & & & -0 = 0 & (L'_3 - L'_4) \end{cases} \quad (59)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -25 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (\lambda) \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -25 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (60)$$

L'ensemble des solutions est donc une droite affine.

3) Mise en place pratique – Méthode de la matrice augmentée

Soit M la matrice associée au système linéaire, de sorte que celui-ci s'écrive sous la forme $M \cdot X = V$. Nous définissons la matrice A , matrice **M augmentée de V** , c'est à dire en rajoutant V comme dernière colonne (A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$). La méthode du pivot de Gauss peut être appliquée de manière plus visuelle en appliquant une série de transformations

à A , consistant en des combinaisons linéaires de lignes et de colonnes, jusqu'à ce que A se mette sous la forme par blocs :

$$A = \left(\mathbb{I} \mid W \right), \quad (61)$$

où W est le vecteur solution du système.

Il faut cependant être très prudent car tel que le problème est formulé, cette méthode ne s'applique qu'aux cas où le système admet une solution unique (et non pas un plan vectoriel de solutions par exemple), c'est à dire aux cas où $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. Nous verrons dans la partie suivante du cours comment établir la validité de cette affirmation pour une matrice M donnée. Pour l'instant, supposons que le problème est bien posé.

★ Plus précisément, en utilisant la notion de *rang* d'une matrice,

- $\text{rank}(M) < \text{rank}(A) \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$.
- $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) \Rightarrow \dim(\mathcal{S}) = \text{rank}(M) - \text{rank}(A)$.
- $\text{rank}(M) = \text{rank}(A) \Rightarrow \exists! u, u \in \mathcal{S}$.

■ Exemple : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x & & - & z & = & 2 \\ 6x & + & 5y & + & 3z & = & 7 \\ 2x & - & y & & & = & 4 \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \Rightarrow \mathcal{S} = \left(\begin{array}{c} 3/2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

II] Inversion de matrices

1) Cas pratique – Méthode de la matrice augmentée.

La méthode de la matrice augmentée se généralise à l'inversion matricielle. Plus précisément, si $M \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$, la matrice augmentée s'écrit par blocs :

$$A = (M \mid \mathbb{I}). \quad (64)$$

Il suffit alors de combiner linéairement les lignes de la matrice augmentée jusqu'à faire apparaître l'identité dans le bloc de gauche.

■ Exemple : Inverser la matrice suivante :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le problème qui se pose à présent est alors de déterminer si une matrice donnée peut être inversée ou pas, autrement dit si son rang est égal à sa taille n . Nous avons dans le premier cours appris à déterminer la dimension d'une famille de vecteurs. Cependant, cela peut vite devenir lourd, surtout lorsque la taille des matrices augmente. Il nous faut donc des outils plus systématiques.

2) Le déterminant

► Définitions :

- Une *forme linéaire* est une application linéaire qui transforme les vecteurs en scalaires.
- Une forme linéaire f est dite *n-linéaire* si elle agit sur n vecteurs et qu'elle est linéaire en chacun de ses arguments :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f(\{v_1, \dots, v_n\}) + \mu f(\{v_1, \dots, v_n\}) = f(\{v_1, \dots, \lambda \cdot v_i + \mu \cdot v_i, \dots, v_n\}). \quad (66)$$

- Une forme n -linéaire f est dite *alternée* si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}) = -f(\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}). \quad (67)$$

- Le *déterminant* d'une famille de vecteur, noté $\det(\cdot)$, est la (unique au signe près) forme n -linéaire alternée sur son espace de définition.

- Propriété : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \det(\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n\}) = 0$.

De même,

$$\exists i, \exists \{\lambda_k\}_{k \neq i} : v_i = \sum_{k \neq i} \lambda_k \cdot v_k \Rightarrow \det(\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}) = 0. \quad (68)$$

Autrement dit,

$$\det(\{v_1, \dots, v_n\}) = 0 \Leftrightarrow \{v_i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ est liée.} \quad (69)$$

► Définition : Le déterminant d'une **matrice** est le déterminant de la **famille de vecteurs** constituée par l'ensemble des colonnes, ou lignes, de cette matrice.

- Propriétés :

$$\det({}^T A) = \det(A) \quad (70)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B) \quad (71)$$

En vertu de ce qui précède,

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

- Si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$, et ce quelque soient les valeurs des éléments extradiagonaux. Cette propriété est valable en particulier pour $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

- Si A est diagonale par blocs, alors,

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det(B) \det(D), \quad (72)$$

et ce quelque soit le bloc C .

• Propriété : Le déterminant est la **somme** des **produits** de tous les termes de A en prenant **un et un seul élément par ligne et par colonne**, et avec tous les termes **dans l'ordre des vecteurs de base**.

Formellement,

$$\det(A) = \sum_{\{\sigma\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}. \quad (73)$$

Dans cette formule, σ parcourt l'ensemble des *permutations* de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$, et $\varepsilon(\sigma)$ est la *signature* de cette permutation :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}, \quad (74)$$

où $m(\sigma)$ est le nombre de permutations élémentaires (échanges de deux éléments) constituant σ . Nous n'irons pas plus loin concernant cette formule et les propriétés du groupe symétrique (ensemble des permutations sur un sous ensemble fini et discret) et renvoyons le lecteur intéressé vers la littérature à ce sujet.

Application pratique : Dans le cas d'une matrice à deux colonnes,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (75)$$

Il est très important de bien distinguer entre une matrice, écrite avec ses coefficients entre parenthèses, et un déterminant, où les coefficients sont écrits entre des barres verticales.

Pour des matrices plus grandes, le déterminant peut être calculé à l'aide d'un *développement par lignes ou par colonnes* : à chaque coefficient est attribué un coefficient $(-1)^{i+j}$. Le déterminant peut être calculé en multipliant, pour chaque élément d'une ligne ou d'une colonne donnée, ce poids à la valeur du coefficient, et le déterminant de la matrice dont la ligne et la colonne contenant le coefficient ont été effacés, et en sommant tous les nombres obtenus.

■ Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Le problème se ramène alors au calcul de déterminants de taille inférieure.

(R) Puisque le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, le développement se fait de la même manière suivant les lignes ou suivant les colonnes. Bien entendu, le calcul sera d'autant plus facile que la ligne ou colonne est choisie de manière judicieuse.

■ Exemples :

- Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Ici, il est intéressant de développer par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (77)$$

- Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (78)$$

Cette fois ci, il est plus judicieux de développer par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{vmatrix} = -\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) = -1 \quad (79)$$

- Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (80)$$

Cette fois ci encore, il est judicieux de développer par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \quad (81)$$

Le développement par ligne ou par colonne est particulièrement intéressant pour calculer le déterminant d'une matrice possédant beaucoup de zéros. Dans tous les cas, il fournit un algorithme systématique pour réduire tout déterminant à une somme de déterminants élémentaires (pour des matrices de taille importante, il est judicieux de préférer d'autres types d'algorithmes plus efficaces ; dans le cadre de ce cours, nous ne demanderons pas de calculer des déterminants de matrices de plus de trois ou quatre colonnes, sauf si celui peut être réduit à une forme très simple).

3) Application n°1 : Inverse d'une matrice

► Définition : On appelle *mineur*, $\Delta_{ij}(A)$, d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(R)$, le déterminant de la matrice $A'_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(R)$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ième colonne de A (attention, ici i et j sont fixés et ne sont pas des indices muets).

■ Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 4 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A'_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}, \quad A'_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$$

► Définition : La *comatrice* de A , notée $C(A)$, est la matrice dont chaque coefficient est donné par le mineur de la matrice correspondant à la ligne i et la colonne j choisie, affecté par un poids $(-1)^{i+j}$.

$$[C(A)_{ij}] = [(-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A)] \quad (82)$$

■ Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 4 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C(A) = \begin{pmatrix} -42 & -24 & 72 \\ 63 & 3 & -9 \\ -28 & 50 & 4 \end{pmatrix}$$

♦ Théorème :

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} = \frac{{}^T C(A)}{\det(A)} \quad (83)$$

(R) Cette formule est toujours applicable car toute matrice inversible a un déterminant non nul.

Là encore, cette formule donne un algorithme systématique de calcul de l'inverse, mais ce n'est pas toujours le plus efficace. Elle peut néanmoins se révéler très utile dans des preuves formelles pour donner une expression explicite de l'inverse (rappelons que, sous réserve que celui-ci existe, il est unique).

4) Application n°2 : Systèmes linéaires

• Règle de Cramer : Soit $A \cdot X = V$ un système linéaire où A est carrée, et soit $A_k(V)$ la matrice obtenue en remplaçant dans A la k -ième colonne par le vecteur V . Alors, la solution du système, si elle existe, est donnée par le vecteur de composantes

$$x_k = \frac{\det(A_k(V))}{\det(A)} \quad (84)$$

■ Exemple :

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{13}{11}, y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{16}{11} \right) \right\}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} 3x + y &= \frac{39 + 16}{11} = \frac{55}{11} = 5 \\ -2x + 3y &= \frac{-26 + 48}{11} = \frac{22}{11} = 2 \end{aligned}$$

Attention : La règle de Cramer ne s'applique qu'aux systèmes carrés à solution unique. Heureusement, l'introduction du déterminant nous a doté d'un outil permettant de déterminer à l'avance si tel est le cas.

III] Conclusion

Ce chapitre présente comment l'algèbre matricielle peut être utilisée en pratique pour résoudre des systèmes linéaires, un type de problème assez récurrent en physique. De plus, l'introduction du déterminant permet de déterminer à l'avance si ces problèmes sont solubles ou non, et fournit également des formules systématiques qui permettent un traitement algorithmique à minima de ces problèmes.

Cours n°4 : Applications linéaires en dimension finie

I] Généralités

1) Applications linéaires

Soient (E, F) deux espaces vectoriels.

► Définition : $f : E \rightarrow F$ est une *application linéaire* si et seulement si,

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, f(\lambda \cdot_E u + \mu \cdot_E v) = \lambda \cdot_F f(u) + \mu \cdot_F f(v), \quad (85)$$

où nous avons indiqué explicitement sur quel espace vectoriel agit la loi de composition externe.

► Définition : Dans le cas $E = F$, f est appelé *endomorphisme* sur E .

♦ Théorème :

$$\dim(E) = n \Rightarrow E \simeq \mathbb{R}^n, \quad (86)$$

où ici le symbole $\simeq$ signifie « *isomorphe à* », autrement dit, il existe une application **linéaire bijective** entre E et $\mathbb{R}^n$.

En dimension finie, nous pouvons donc travailler uniquement sur $\mathbb{R}^n$ sans perte de généralité.

(R) Attention, ce théorème n'est valable qu'en dimension finie.

2) Représentation matricielle

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une **base** de E , et x un vecteur tel que : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$. Appliquons la propriété de linéarité de f :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i) \quad (87)$$

Ainsi, l'image par f de **n'importe quel vecteur** est une combinaison linéaire des $\{f(e_i)\}$, précisément, celle donnée par l'ensemble des composantes de x dans cette base. Si nous construisons la matrice F :

$$[F_{ij}] = \left[(f(e_j))_i \right], \quad (88)$$

alors

$$Y = f(X) \Leftrightarrow F \cdot X = Y. \quad (89)$$

Il existe donc une relation bijective entre applications linéaires en dimension finie et matrices carrées. Les propriétés de f et F sont alors similaires. Par exemple, on appellera *rang* de la fonction F l'entier suivant :

$$\text{rank}(f) = \dim \left[\text{Vect} \left(\{f(e_i)\}_{1 \leq i \leq n} \right) \right]. \quad (90)$$

Dans ce cas,

$$\text{rank}(f) = \text{rank}(F). \quad (91)$$

II] Organiser E par rapport à f

1) Noyau et image

► Définitions :

- Le *noyau* d'une application linéaire est l'espace suivant :

$$\text{Ker}(f) = \left\{ v \in E \mid f(v) = 0 \right\}. \quad (92)$$

- L'*image* de f est l'ensemble $f(E)$, ou encore,

$$\text{Im}(f) = \left\{ v \in E \mid \exists x \in E : f(x) = v \right\}. \quad (93)$$

Le noyau et l'image d'un endomorphisme sur E sont des **sous-espaces vectoriels** de E .

◆ Théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) = n \quad (94)$$

• Conséquences :

1. $(f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0) \Leftrightarrow f \text{ bijective} \Leftrightarrow F \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.
2. $\dim(\text{Im}(f)) = n \Leftrightarrow f \text{ bijective} \Leftrightarrow F \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$

2) Projecteurs

Soit $E = f \oplus G$.

► Définition : Le *projecteur* sur F est l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{\dim(F)} x_i \cdot e_i \end{aligned} \tag{95}$$

• Propriétés :

1. $p \text{ projecteur} \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow P^2 = P$. Dans la dernière égalité, la matrice P respectant cette condition est dite *idempotente*.
2. Si $p^2 = p$, alors $p|_{\text{Im}(p)} = \mathbb{I}$.
3. Si p est un projecteur, alors $1 - p$ est un projecteur. En effet, $(1 - p)^2 = 1 - p - p + p^2 = 1 - p$.

Soit p un projecteur, et $i_p = \dim(\text{Im}(p))$. Soit K l'espace tel que $E = \text{Im}(p) \oplus K$, et $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base adaptée à cette décomposition. Soit $x \in E$.

$$x = \sum_{i=1}^{i_p} x_i \cdot e_i + \sum_{i=i_p+1}^n x_i \cdot e_i. \tag{96}$$

Puisque p est linéaire, et que sa restriction à $\text{Im}(p)$ est l'identité, nous pouvons écrire,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{i_p} x_i \cdot e_i + u, \tag{97}$$

soit, par idempotence,

$$\begin{aligned} p(p(x)) &= \sum_{i=1}^{i_p} x_i \cdot p(e_i) + p(u) \\ &= \sum_{i=1}^{i_p} x_i \cdot e_i + p(u). \end{aligned} \tag{98}$$

$$p(u) \in \text{Im}(p) = \sum_{i=i_p+1}^n x_i \cdot p(e_i) \Rightarrow \forall i \in [i_p + 1; n], p(e_i) = 0 \tag{99}$$

Les projecteurs sont donc des applications utiles pour récupérer une certaine partie d'un vecteur. Ils sont donc très utiles pour organiser la matrice représentative F par blocs.

Quelle est la façon la plus adaptée de construire les blocs ?

3) Valeurs propres et vecteurs propres

► Définition : Soit $v \neq 0$ tel que $\exists \lambda \in \mathbb{R} : f(v) = \lambda \cdot v$. Alors,

- λ est une *valeur propre* de f .
- v est un *vecteur propre* de f .

► Définition : Le *spectre* de f , noté $\text{Sp}(f)$, est l'ensemble des valeurs propres de f .

$$\text{Sp}(f) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \in E^* : f(v) = \lambda \cdot v \right\} \quad (100)$$

• Propriété : Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Sp}(f)$, et $(e_1, e_2) \in (E^*)^2$ non colinéaires tels que :

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1 \\ f(e_2) = \lambda_2 \cdot e_2. \end{cases} \quad (101)$$

Soit $v = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2$. Alors,

$$f(v) = (v_1 \lambda_1) \cdot e_1 + (v_2 \lambda_2) \cdot e_2. \quad (102)$$

Dans ce sous-espace, et dans cette base, la matrice représentative de f s'écrit alors :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

c'est donc une matrice **diagonale**.

Dans le cas particulier où E peut être représenté à l'aide d'une base de vecteurs propres de f , nous pouvons écrire de manière générale :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (104)$$

On dit alors que la matrice représentative de f a été *diagonalisée*.

La réduction des endomorphismes à des matrices diagonales permet de grandement simplifier le calcul vectoriel. En particulier, si $F_1 \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $F_2 \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $[F_1, F_2] = 0$.

Lorsque la diagonalisation n'est pas possible, E peut être séparé en une somme directe d'un premier espace, de base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq k}$, et un second de base $\{e_i\}_{k+1 \leq i \leq n}$. La matrice F peut alors être réduite par blocs à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} F_D & 0 \\ 0 & F_{ND} \end{pmatrix}, \quad (105)$$

où $F_D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $F_{ND} \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Comment savoir si F peut être diagonalisée ? Comment déterminer $\text{Sp}(f)$?

4) Polynôme caractéristique

Par définition,

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists v \in E^* : f(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (f - \lambda \cdot \text{id})(v) = 0. \quad (106)$$

Autrement dit, les valeurs propres de f correspondent aux valeurs de λ pour lesquelles $\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}) \neq \{0\}$, ou encore $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id})) \neq 0$. Or, nous avons vu comment caractériser les applications linéaires dont le noyau est non trivial :

$$\exists v \in E^* : (F - \lambda \cdot \mathbb{I}) \cdot v = 0 \Leftrightarrow |F - \lambda \cdot \mathbb{I}| = 0. \quad (107)$$

D'après la définition du déterminant, $|F - \lambda \cdot \mathbb{I}|$ est un polynôme d'ordre n en λ , appelé *polynôme caractéristique*.

■ Exemples :

$$\bullet F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |F - \lambda \cdot \mathbb{I}| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{aligned}$$

$$\bullet F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |F - \lambda \cdot \mathbb{I}| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2(1 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de F .

► Définitions : Un polynôme $P[X]$ est *scindé* s'il peut s'écrire sous la forme :

$$P[X] = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)^{\alpha_j} \quad (108)$$

où λ_j sont les *racines* du polynôme, et α_j leurs *multiplicités*.

■ Exemples :

$$\bullet 2X^2 + X - 1.$$

Il y a une racine évidente : -1 , l'autre est $1/2$, donc ce polynôme est égal à $2(X + 1)(x - 1/2)$. C'est donc un polynôme scindé à racines simples.

- $X^2 + X + 1$.

Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. Il est cependant scindé dans $\mathbb{C}$, où il possède deux racines simples :

$$X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

- $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$.

Ce polynôme est scindé avec une racine double égale à -1 .

- $X^3 - 1$.

Ce polynôme possède une racine évidente égale à 1 . Il se met donc sous la forme : $(X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$, soit,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

soit $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, mais il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

- $X^3 + X^2 - X - 1$.

Ce polynôme a une racine évidente égale à 1 . Il se met donc sous la forme : $(X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$, soit,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -1 \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

soit $X^3 + X^2 - X - 1 = (X - 1)(X^2 + 2X + 1) = (X - 1)(X + 1)^2$. C'est donc un polynôme scindé avec 1 comme racine simple, et -1 comme racine double.

Dans la suite, nous noterons $P_f[X]$ le polynôme caractéristique de f .

♦ Théorème : Dans $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

★ Il s'agit même de la définition du corps des nombres complexes, dans sa construction à partir du corps des réels.

♦ Théorème : $P_f[X]$ est scindé si et seulement si F est *trigonalisable*, c'est à dire, semblable à une matrice triangulaire :

$$\exists P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}), T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) : F = P \cdot T \cdot P^{-1}. \quad (109)$$

(L'écriture marche tout aussi bien avec une matrice triangulaire inférieure.)

♦ Corollaire : Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

► Définition : Un polynôme $P[X]$ est un *polynôme annulateur* de F si et seulement si $P[F] = 0$.

♦ Théorème de Cayley-Hamilton : Le polynôme caractéristique est annulateur : $P_f[F] = 0$.

► Définitions :

- Le *polynôme minimal* de F est le polynôme annulateur de plus petit degré.
- f est *diagonalisable* si et seulement si :

$$\exists P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) : F = P \cdot D \cdot P^{-1}. \quad (110)$$

Dans ce cas, les valeurs sur la diagonale de D sont les valeurs propres de f .

♦ Théorème : f est diagonalisable si et seulement si son **polynôme minimal** est **scindé à racines simples**.

■ Exemples :

• $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$P_f[X] = -X^3 + 5X^2 - 8X + 4 = (1 - X)(2 - X)^2$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines doubles. Examinons si le polynôme scindé à racines simples $P[X] = (X - 1)(X - 2)$ est annulateur.

$$(1 - F) \cdot (2 - F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce polynôme n'est pas annulateur, F n'est pas diagonalisable.

En revanche, nous pouvons vérifier le théorème de Cayley-Hamilton :

$$(1 - F) \cdot (2 - F)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} P_f[X] &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= [(2-X)^2 - 1](1-X) \\ &= [4 - 4X + X^2 - 1](1-X) \\ &= (X-3)(X-1)(1-X) \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines doubles. Examinons si le polynôme scindé à racines simples $P[X] = (X - 1)(X - 3)$ est annulateur.

$$(F - 1) \cdot (F - 3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce polynôme est annulateur, F est donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Par conséquent,

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Que faire lorsque F n'est pas diagonalisable ?

5) Réduction de Jordan

De ce qui précède, nous déduisons que si $P_f[X]$ a n racines, alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f), \quad (112)$$

où $E_\lambda(f)$ sont les sous espaces propres associés à une valeur propre λ donnée.

★ La série de théorèmes ci-dessous n'est pas à apprendre par cœur. Elle a pour vocation à montrer comment se construit le théorème fondamental qui apparaîtra à la fin du raisonnement.

♦ Théorème 1 : Décomposition de Dunford Soit U une matrice trigonalisable.

$$\exists ! (D, N) : \left. \begin{array}{l} D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C}) \\ N \text{ nilpotente} \end{array} \right\} : U = D + N, [D, N] = 0. \quad (113)$$

♦ Théorème 2 : Considérons la décomposition de Dunford. Soit p le plus petit entier naturel tel que $N^p = 0$, appelé *indice* de N . Fixons un vecteur x non nul et considérons l'ensemble suivant :

$$S_x = \text{Vect} \{x, N \cdot x, N^2 \cdot x, \dots, N^{p-1} \cdot x\} \quad (114)$$

appelé *sous-espace cyclique engendré par x* . Puisque N est d'indice p , il existe au moins un x pour lequel cette séquence ne comporte qu'un seul vecteur nul (sinon l'indice de N serait $p-1$). Dans la base formée par une base de S_x complétée en une base de E , N s'exprime donc :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = N_1. \quad (115)$$

On pourra retenir ce théorème sous la forme : toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de la forme (115).

Choisissons une valeur propre, et plaçons nous dans $E_\lambda(f)$. Dans cet espace, $D = \lambda \cdot \mathbb{I}$. Soit P_N la matrice telle que $N = P_N \cdot N_1 \cdot P_N^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} D + N &= P_N \cdot \left[P_N^{-1} \cdot D \cdot P_N + N_1 \right] \cdot P_N^{-1} \\ &= P_N \cdot \left[\lambda \cdot P_N^{-1} \cdot \mathbb{I} \cdot P_N + N_1 \right] \cdot P_N^{-1} \\ &= P_N \cdot \left[\lambda \cdot \mathbb{I} + N_1 \right] \cdot P_N^{-1}. \end{aligned} \quad (116)$$

$$\Rightarrow D + N \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = J_\lambda. \quad (117)$$

J_λ porte le nom de *bloc de Jordan*.

Nous en déduisons le théorème fondamental suivant :

♦ Théorème 3 : Décomposition de Jordan

Toute matrice trigonalisable est semblable à une matrice de Jordan par blocs :

$$F \sim \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (118)$$

Puisque dans $\mathbb{C}$ tous les polynômes sont scindés, alors toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables, donc à condition de s'autoriser à travailler avec des coefficients complexes, toute matrice est semblable à une matrice de Jordan par bloc, où chaque bloc est une somme de matrice de $\text{Vect}(\mathbb{I})$ et d'une matrice nilpotente.

■ Exemple : Que se passe-t-il dans un sous-espace sur lequel f n'est pas diagonalisable ?

$$F = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$F \cdot e_1 = a \cdot e_1$$

e_1 est donc un vecteur propre de F de valeur propre a .

$$F \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Ce dernier vecteur n'est pas exprimable en termes simples.

$$P_f[X] = \begin{vmatrix} a - X & 1 \\ 0 & a - X \end{vmatrix} = (a - X)^2$$

Nous avons donc bien $\dim(E_a(f)) = 2$, mais il n'est pas possible de construire une base de $E_a(f)$ uniquement à partir de vecteurs propres de f .

► Définition : Deux matrices sont dites *codiagonalisables* s'il existe une base unique dans laquelle la représentation des deux matrices est diagonale.

◆ Théorème 4 : Codiagonalisation

$$F_1 \text{ et } F_2 \text{ codiagonalisables} \Leftrightarrow ([F_1, F_2] = 0 \text{ et } F_1 \text{ et } F_2 \text{ diagonalisables.}) \quad (119)$$

Ⓓ • Supposons que F_1 et F_2 soient codiagonalisables :

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), F_1^D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), F_2^D \in \mathcal{D}_n(\mathcal{R}) : F_1 = P \cdot F_1^D \cdot P^{-1}, F_2 = P \cdot F_2^D \cdot P^{-1} \quad (120)$$

Puisque dans $\mathcal{D}_n(\mathcal{R})$, toutes les matrices commutent,

$$F_1 \cdot F_2 = P \cdot F_1^D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot F_2^D \cdot P^{-1} = P \cdot F_1^D \cdot F_2^D \cdot P^{-1} = P \cdot F_2^D \cdot F_1^D \cdot P^{-1} = F_2 \cdot F_1 \quad (121)$$

• Supposons $[F_1, F_2] = 0$ et F_1 et F_2 diagonalisables.

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(E_1)} E_\lambda(f_1) \quad (122)$$

Choisissons une valeur de λ . Soit $v \in E_\lambda(f_1)$,

$$v \in E_\lambda(f_1) \Rightarrow F_1 \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow F_2 \cdot (F_1 \cdot v) = \lambda \cdot (F_2 \cdot v) = F_1 \cdot (F_2 \cdot v) \Rightarrow F_2 \cdot v \in E_\lambda(f_1) \quad (123)$$

$f_2 \Big|_{E_\lambda(f_1)}$ étant diagonalisable, dans une base adaptée, f_1 et f_2 sont codiagonalisables.

III] Conclusions

Nous retiendrons particulièrement de ce chapitre que pour une application linéaire f donnée, la représentation de E peut être adaptée à f à la fois en décomposant E comme somme directe des sous-espaces propres de f , mais également en trouvant une base dans laquelle la matrice représentative de f s'écrit comme une matrice diagonale par blocs avec chaque bloc non trivial exprimé comme un bloc de Jordan.

Cours n°5 : Applications bilinéaires et espaces euclidiens

Dans le cours précédent, nous avons vu comment une matrice peut fournir la représentation d'une application linéaire, agissant sur un espace vectoriel pour construire des vecteurs. Ceci étant dit, les matrices peuvent également agir sur deux vecteurs pour former un scalaire. Elles peuvent donc fournir une représentation de fonctions transformant linéairement deux vecteurs en un scalaire. Comme nous allons le voir, cela permet de doter un espace vectoriel d'outils particuliers qui enrichissent leur structure.

I] Formes bilinéaires

1) Définitions

► Définition : $B(\cdot, \cdot)$ est une *forme bilinéaire* sur E^2 si et seulement si :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x_1, x_2, y \in E, B(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + \mu B(x_2, y)$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x, y_1, y_2 \in E, B(x, \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) = \lambda B(x, y_1) + \mu B(x, y_2)$

Le terme *forme*, plutôt qu'*application* se réfère au fait que l'image de cette fonction est un ensemble *scalaire* et non pas *vectoriel*.

Cas particuliers :

- Forme bilinéaire *symétrique* : $\forall x, y \in E, B(x, y) = B(y, x)$.
- Forme bilinéaire *antisymétrique* : $\forall x, y \in E, B(x, y) = -B(y, x)$.
- Forme *quadratique* : $Q(x) = B(x, x)$.
- Forme bilinéaire *positive* : $\forall x \in E, B(x, x) \geq 0$.
- Forme bilinéaire *définie positive* : $\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow B(x, x) > 0$.

♦ Théorème : Identité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x, y \in E, B(x, y)^2 \geq Q(x)Q(y) \quad (124)$$

avec saturation uniquement si x et y sont colinéaires.

2) Forme matricielle

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de E , et $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$ deux vecteurs de E . Alors, par linéarité,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{i=1}^n x_i B(e_i, y) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) \\ &= {}^T X \cdot B \cdot Y \end{aligned} \quad (125)$$

avec $[B_{ij}] = [B(e_i, e_j)]$. Les outils matriciels s'appliquent donc également à l'étude des formes bilinéaires.

Cette nouvelle structure va nous permettre de construire de nouveaux objets tels que des **normes**, ou des **produits scalaires**, qui vont nous permettre d'introduire la notion de **mesure** sur l'espace vectoriel E .

II] Espaces euclidiens

1) Outils de mesure — produits scalaires

Soit $(\cdot | \cdot)$ une forme bilinéaire sur E^2 .

► Définition : $(\cdot | \cdot) : (x, y) \mapsto (x|y)$ est un *produit scalaire* si elle est :

- bilinéaire
- symétrique
- définie positive

■ Exemples :

- Le produit scalaire *canonique* sur $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$:

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

→ bilinéarité :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 | y) &= \sum_{i=1}^n (\lambda x_1^i + \mu x_2^i) y_i \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_1^i y_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n x_2^i y_i \right) \\ &= \lambda (x_1 | y) + \mu (x_2 | y) \end{aligned}$$

→ symétrie :

$$(\lambda \cdot x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = (\lambda \cdot y | x)$$

→ caractère défini positif : soit $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} (x|x) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ (x|x) = 0 &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = 0 \rightarrow \text{contradiction} \\ &\Rightarrow (x|x) > 0 \end{aligned}$$

- Sur des espaces matriciels,

$$(A, B) \mapsto A : B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij} = \text{Tr}(A^T B)$$

→ bilinéarité :

$$(\lambda \cdot A_1 + \mu \cdot A_2) : B = \lambda (A_1 : B) + \mu (A_2 : B)$$

→ symétrie :

$$\text{Tr}(A^T B) = \text{Tr}\left({}^T(A^T B)\right) = \text{Tr}(B^T A)$$

→ caractère défini positif : soit $A \neq 0$,

$$\text{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n A_{ij}^2 > 0$$

- ★ Sur des espaces de fonctions (attention, dimension infinie!) :

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (a < b)$$

→ bilinéarité :

$$\int_a^b (\lambda \cdot f_1 + \mu \cdot f_2)(x)g(x) dx = \lambda \int_a^b f_1(x)g(x) dx + \mu \int_a^b f_2(x)g(x) dx$$

→ symétrie :

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx$$

→ caractère défini positif : soit $f \neq 0$,

$$\int_a^b f^2(x) dx > 0$$

- Le produit scalaire défini par $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$$(x, y) \mapsto {}^T X \cdot B \cdot Y = x_1(y_1 + y_3) + 2x_2y_2 + x_3(y_1 + 3y_3)$$

→ bilinéarité :

$${}^T(\lambda \cdot X_1 + \mu \cdot X_2) \cdot B \cdot Y = (\lambda \cdot {}^T X_1 + \mu \cdot {}^T X_2) \cdot B \cdot Y = \lambda({}^T X_1 \cdot B \cdot Y) + \mu({}^T X_2 \cdot B \cdot Y)$$

→ symétrie :

$${}^T Y \cdot B \cdot X = y_1(x_1 + x_3) + 2x_2y_2 + y_3(x_1 + 3x_3) = {}^T X \cdot B \cdot Y$$

→ caractère défini positif : soit $x \neq 0$,

$${}^T X \cdot B \cdot X = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$$

Étude de $f : x \mapsto x^2 + 2ax + 3a^2$. Discriminant : $\Delta = 4a^2 - 12a^2 = -8a^2 \leq 0$
 $\Rightarrow {}^T X \cdot B \cdot X > 0$.

Conclusions :

- Même si dans l'immense majorité des cas, le produit scalaire utilisé est le produit scalaire canonique sur $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$, il est important de se rappeler que **celui-ci n'est pas unique**.
- Comprendre les matrices et les fonctions comme éléments d'un espace vectoriel permet de définir un produit scalaire sur les espaces de matrices ou de fonctions.

2) Outils de mesure — Normes et distances

► Définition : Une *norme* $N(\cdot)$ est une forme linéaire telle que :

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- $\forall x, y \in E, N(x) + N(y) \geq N(x + y)$ (inégalité triangulaire)

■ Exemples :

- $\|\cdot\|$, la norme canoniquement induite par **un** produit scalaire : c'est la forme quadratique associée à $(\cdot | \cdot)$,

$$\|x\|^2 = (x|x) \quad (126)$$

→ Comportement en 0 : puisque le produit scalaire est **défini positif**,

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

→ Homogénéité : par **bilinéarité**,

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot x\|^2 &= (\lambda \cdot x | \lambda \cdot x) = \lambda^2 (x|x) \\ \Rightarrow \|\lambda \cdot x\| &= \sqrt{\lambda^2} \|x\| = |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

→ Inégalité triangulaire : par **bilinéarité** et **symétrie**,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

D'autre part,

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

Enfin, d'après l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**,

$$\|x\|\|y\| \geq (x|y)$$

soit finalement,

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Enfin, puisque ces deux nombres sont nécessairement positifs, et que la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons l'inégalité triangulaire.

- Il existe également d'autres définitions possibles et tout aussi valables, par exemple,

$$\|\cdot\|_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (127)$$

→ Comportement en 0 :

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |x_i| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

→ Homogénéité :

$$\|\lambda \cdot x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

→ Inégalité triangulaire : d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\ \Rightarrow \|x + y\|_1 &\leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

- De même,

$$\|\cdot\|_1 : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{ij}| \quad (128)$$

est une norme (démonstration en exercice).

- La forme linéaire suivante est également une norme :

$$\|\cdot\|_\infty : x \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \quad (129)$$

→ Comportement en 0 :

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

→ Homogénéité :

$$\|\lambda \cdot x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda x_i|\} = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} = |\lambda| \|x\|_\infty$$

→ Inégalité triangulaire : d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i + y_i|\} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i| + |y_i|\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i|\} \\ \Rightarrow \|x + y\|_\infty &\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

- De même,

$$\|\cdot\|_\infty : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \{|M_{ij}|\} \quad (130)$$

est une norme (démonstration en exercice).

- À partir des exemples précédents, nous pouvons également construire les normes suivantes :

$$\rightarrow \|\cdot\| : A \mapsto \sqrt{\text{Tr}(^T A A)}$$

$$\rightarrow \|\cdot\| : f \mapsto \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

$$\rightarrow \|\cdot\|_B : X \mapsto \sqrt{^T X \cdot B \cdot X}$$

• Propriétés :

- *Identité de Cauchy-Schwarz* :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (131)$$

- *Identité de Minkowski* :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (132)$$

- *Identité de polarisation* :

$$(x|y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (133)$$

- *Identité du parallélogramme* :

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad (134)$$

C'est un bon exercice de démontrer les propriétés ci-dessus à partir de la définition du produit scalaire, et de sa norme induite.

► Définition : Un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme est un *espace euclidien*.

► Définition : Une *distance* $d(\cdot, \cdot)$ est une forme respectant les propriétés suivantes :

- $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\forall x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

- Propriété : Si $N(\cdot)$ est une norme sur E , alors

$$d_N : (x, y) \mapsto N(x - y) \quad (135)$$

est une distance sur E .

D
(i)

$$\forall (x, y) \in E^2, d_N(x, y) = N(x - y) = N((-1) \times (y - x)) = 1 \times N(y - x) = d_N(y, x)$$

(ii)

$$\forall (x, y) \in E^2, d_N(x, y) = 0 \Leftrightarrow N(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(iii)

$$\forall (x, y, z) \in E^3, d_N(x, z) = N(x - z) = N(x - y + y - z) \leq N(x - y) + N(y - z) = d_N(x, y) + d_N(y, z)$$

■ Exemples :

- À partir du produit scalaire canonique,

$$d : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (136)$$

- À partir de la trace matricielle,

$$d : (A, B) \mapsto \sqrt{\text{Tr}^T(A - B) \cdot (A - B)} \quad (137)$$

- À partir de l'intégrale sur des fonctions,

$$d : (f, g) \mapsto \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx} \quad (138)$$

- À partir de la norme 1,

$$d_1 : (x, y) \mapsto \left| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \right| \quad (139)$$

- À partir de la norme infinie,

$$d_\infty : (x, y) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \quad (140)$$

- À partir de la norme induite par une matrice,

$$d_B : (x, y) \mapsto \sqrt{^T(X - Y) \cdot B \cdot (X - Y)} \quad (141)$$

Toutes ces définitions ne donnent pas forcément la même mesure de la distance entre deux vecteurs, même si une forme de cohérence doit persister.

• Bilan :

Munir un espace vectoriel d'un produit scalaire permet de définir des outils de mesure, comme par exemple la distance entre deux vecteurs.

Attention, cette construction n'est **pas unique**.

On n'apprendra pas par cœur toutes les normes et distances ci-dessus, mais il est attendu de savoir déterminer si une application donnée est un produit scalaire/une norme/une distance.

III] Structuration d'un espace vectoriel par un produit scalaire

1) Orthogonalité

Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire.

► Définition : L'*orthogonalité*, notée $\perp$, est définie comme suit :

$$x \perp y \Leftrightarrow (x|y) = 0 \quad (142)$$

► Définitions :

- $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une *base orthogonale* si

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, (e_i|e_j) = 0 \quad (143)$$

- $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une *base orthonormale* si elle est orthogonale et que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (e_i|e_i) = 1 \quad (144)$$

- $E \perp F$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in F, (x|y) = 0 \quad (145)$$

- Soit $A \subseteq E$.

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, (x|y) = 0\} \quad (146)$$

• Propriété : $A \subseteq (A^\perp)^\perp$. Attention, **il n'y a pas forcément égalité**.

■ Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{e_1\}$.

$$A^\perp = \text{Vect}\{e_2\}.$$

$$(A^\perp)^\perp = \text{Vect}\{e_1\} \neq A.$$

► Définitions :

- La *somme directe orthogonale* de deux ensembles est définie par :

$$(E = F \oplus G \text{ et } F \perp G) \Leftrightarrow E = F \overset{\perp}{\oplus} G \quad (147)$$

Cette décomposition, si elle existe, est unique, et de plus,

$$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E \Leftrightarrow (F^\perp)^\perp = F \quad (148)$$

► Définition : Un projecteur est un *projecteur orthogonal* si $p_F : E \rightarrow F$ avec $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.
Remarquons que p définit dans ce cas le projecteur orthogonal $q_G = 1 - p_F$ sur G .

• Propriété : $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \left\| x - \sum_{i=1}^f (x|e_i)e_i \right\|$, où $f = \dim(F)$.

► Définition : Le *groupe orthogonal* sur E est l'ensemble des transformations suivantes :

$$\text{O}(E) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^T M \cdot M = \mathbb{I} \right\} \quad (149)$$

■ Exemples :

- Les rotations sont des transformations orthogonales. À deux dimensions,

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Le groupe orthogonal comporte aussi les composées de rotations et de symétries axiales :

$$\mathcal{W}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\det(\mathcal{W}(\theta)) = -1$.

• Propriétés :

- Toute matrice du groupe orthogonal transforme une base orthonormale en base orthonormale.
- Les transformations orthogonales sont des isométries :

$$\begin{aligned} (X|X) &= {}^T X \cdot X \\ &= {}^T X \cdot \mathbb{I} \cdot X \\ &= {}^T X \cdot {}^T M \cdot M \cdot X \\ &= {}^T (M \cdot X) \cdot (M \cdot X) \\ &= (M \cdot X | M \cdot X) \end{aligned} \quad (150)$$

- Le groupe *spécial orthogonal*, $\text{SO}(E)$ est l'ensemble suivant :

$$\text{SO}(E) = \{M \in \text{O}(E) \mid \det(M) = +1\} \quad (151)$$

Le groupe orthogonal se décompose alors en :

$$\text{O}(E) = \text{SO}(E) \oplus \{M \in \text{O}(E) \mid \det(M) = -1\} \quad (152)$$

Le groupe spécial orthogonal contient les rotations. Ce sont les isométries qui préservent la structure vectorielle et l'orientation (contrairement aux translations qui peuvent transformer une structure vectorielle en une structure affine). L'autre composante du groupe comprend les composées de rotations avec les symétries axiales ; ce sont les transformations qui changent l'orientation.

2) Endomorphismes adjoints

► Définition : L'*adjoint* de f , noté f^* est l'application définie par :

$$\forall x, y \in E, (f(x)|y) = (x|f^*(y)) \quad (153)$$

• Propriétés :

- f^* est unique.
- L'adjonction est une involution : $(f^*)^* = f$.
- Si $f = f^*$, f est dit *auto-adjoint*.

■ Exemples :

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Si l'on calcule ${}^TY \cdot A \cdot X$ en faisant d'abord agir A sur X , le résultat est :

$$y_1(5x_1 + x_3) + 2x_2y_2 + y_3(x_1 + 4x_3)$$

alors que si A agit d'abord sur TY , on trouve :

$$x_1(5y_1 + y_3) + 2x_2y_2 + x_3(y_1 + 4y_3)$$

A est donc auto-adjoint.

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si l'on calcule ${}^TY \cdot B \cdot X$ en faisant d'abord agir B sur X , le résultat est :

$$y_1(2x_1 + x_3) + 2y_2(x_1 + 2x_2) + x_3y_3$$

alors que si B agit d'abord sur TY , on trouve :

$$x_1(2y_1 + y_3) + 2x_2(y_1 + 2y_2) + x_3y_3$$

B n'est donc pas auto-adjoint.

• Propriétés :

- f auto-adjoint $\Leftrightarrow P_f[X]$ scindé sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

- f auto-adjoint $\Rightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)}^\perp E_\lambda(f)$.

- f auto-adjoint $\Leftrightarrow F \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists U \in \text{O}(E), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathcal{R}) : M = U \cdot D \cdot {}^T U$

Cette propriété est plus forte que de savoir que M est diagonalisable : elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

- La *transconjugée* d'une matrice M , notée $M^\dagger$, est la prise successive de la transposition et de la conjugaison complexe de chacun des coefficients. Des propriétés analogues existent alors pour les matrices complexes : Le *groupe unitaire*, $\text{U}(E)$, est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^\dagger \cdot M = \mathbb{I}$. Le groupe *spécial unitaire*, $\text{SU}(E)$, est l'ensemble des matrices de $\text{U}(E)$ de déterminant égal à 1.

Un endomorphisme H est dit *hermitien* si $H^\dagger = H$. Dans ce cas, $\exists U \in \text{U}(E), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathcal{R}) : H = U \cdot D \cdot U^\dagger$.

III] Conclusions

L'étude des formes bilinéaires via les matrices associées nous a permis de construire de nouveaux outils structurant dans nos espaces vectoriels, comme le produit scalaire, la norme, et la distance.

La définition de l'orthogonalité, à partir d'un produit scalaire donné, permet de structurer un espace de façon efficace, en arrivant idéalement à l'écrire comme une somme directe orthogonale, par exemple d'espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint.

Ces outils nous ont également donné de nouveaux critères plus efficaces pour réduire et diagonaliser les endomorphismes.

Bibliographie

Ce cours est appuyé sur les références suivantes :

- [1] C. Aslangul, *Mathématiques pour les sciences*, De Boeck, 2012
- [2] M. Boas, *Mathematical methods in the physical sciences*, Wiley and Sons, 2006
- [3] V. Bayle, cours donné au lycée Pierre de Fermat, 2010-2011
- [4] M. Gonnord, cours donné au lycée Pierre de Fermat, 2011-2012

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Les coordonnées d'un vecteur sont uniques.

- ☐ Vrai
☐ Faux

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \pi \end{pmatrix}$

2. Un espace vectoriel est défini par :

- ☐ Une loi qui compose deux vecteurs en un vecteur
☐ Une loi qui compose deux scalaires en un scalaire
☐ Une loi qui compose un scalaire et un vecteur en un vecteur
☐ Une loi qui compose un scalaire et un vecteur en un scalaire
☐ Une loi qui compose deux scalaires en un vecteur
☐ Une loi qui compose deux vecteurs en un scalaire

☐ $(\sqrt{2} \ 0 \ \ln(2) \ 1)$

☐ Tous les trois

☐ Aucun des trois

3. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de :

- ☐ $\mathbb{R}^2$
☐ $\mathbb{R}^3$
☐ $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
☐ ni $\mathbb{R}^2$ ni $\mathbb{R}^3$

7. Quel est le résultat de l'opération suivante :

$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

4. Lesquelles de ces familles sont libres ?

- ☐ $(3\vec{e}_x, -6\vec{e}_y)$
☐ $(\vec{e}_x - \vec{e}_y, \vec{e}_x + \vec{e}_y)$
☐ $(\vec{e}_x - \vec{e}_y, -\vec{e}_x + \vec{e}_y)$
☐ $(4\vec{e}_x - 7\vec{e}_y, -8\vec{e}_x + 14\vec{e}_y)$

8. Quelle est la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$?

☐ n^2

☐ $\frac{n^2}{2}$

☐ $\frac{n(n+1)}{2}$

☐ $\frac{n(n-1)}{2}$

5. $\text{Vect}\{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\} = \text{Vect}\{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)\} \oplus \text{Vect}\{(\vec{e}_z)\}$

- ☐ Vrai
☐ Faux

9. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- ☐ Vrai
☐ Faux

6. Lesquels des éléments suivants sont des matrices ?

10. Le cube de côté 2 centré sur l'origine est un espace vectoriel.

☐ Vrai

☐ Faux

11. Le plan d'équation $x + y + z = 0$ est un espace vectoriel.

☐ Vrai

☐ Faux

12. Le plan d'équation $x + y - z = 2$ est un espace vectoriel.

☐ Vrai

☐ Faux

13. Le plan $x + y + z = 0$ est égal à $\text{Vect}\{e_x - e_y, e_x - e_z\}$.

☐ Vrai

☐ Faux

14. Le plan $x + y + z = 0$ est égal à $\text{Vect}\{e_x - e_y, e_x - e_z, e_z - e_x, e_x - 1/2 e_y - 1/2 e_z\}$.

☐ Vrai

☐ Faux

15. Le plan $x + y + z = 0$ est égal à $\text{Vect}\{e_x + e_y, e_x + e_z\}$.

☐ Vrai

☐ Faux

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Lesquels de ces ensembles sont des espaces vectoriels ?

- ☐ $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- ☐ $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C}), +, \cdot)$
- ☐ $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \times, \cdot)$
- ☐ $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C}), \times, \cdot)$
- ☐ $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- ☐ $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times, \cdot)$

2. Quelle est la dimension de l'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures :

- ☐ n
- ☐ $n(n+1)$
- ☐ n^2
- ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$
- ☐ $\frac{n(n-1)}{2}$

3. Quelle est la dimension de l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques :

- ☐ n
- ☐ $n(n+1)$
- ☐ n^2
- ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$
- ☐ $\frac{n(n-1)}{2}$

4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

5. Le commutateur $[A, B]$ entre A et B sert à déterminer :

- ☐ Si A et B sont des matrices de même taille.
- ☐ Si A et B commutent vis-à-vis de la multiplication.
- ☐ Si A et B commutent vis-à-vis de l'addition.
- ☐ Si A et B ont le même rang.

6. Pour pouvoir multiplier A par B , il faut que :

- ☐ A et B aient le même nombre de colonnes.
- ☐ A et B aient le même nombre de lignes.
- ☐ le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .
- ☐ le nombre de lignes de A soit égal au nombre de colonnes de B .
- ☐ Le produit est toujours possible.

7. Que peut on dire sur le commutateur de deux matrices diagonales ?

- ☐ Il est toujours nul.
- ☐ Il est nul si les matrices ont les mêmes coefficients.
- ☐ Il n'est jamais nul.
- ☐ Aucun des choix précédents.

8. Que peut on dire sur la trace $\text{Tr}(\cdot)$ d'un produit de matrices ?

- ☐ $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$.
- ☐ $\text{Tr}(A \cdot B \cdot C) = \text{Tr}(C \cdot A \cdot B)$.
- ☐ $\text{Tr}(A \cdot B \cdot C) = \text{Tr}(C \cdot B \cdot A)$.
- ☐ $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^T A)$.
- ☐ $\text{Tr}({}^T(A \cdot B \cdot C)) = \text{Tr}({}^T C \cdot {}^T A \cdot {}^T B)$.
- ☐ $\text{Tr}({}^T(A \cdot B \cdot C)) = \text{Tr}({}^T C \cdot {}^T B \cdot {}^T A)$.
- ☐ Aucun des choix précédents.

9. Une matrice est dite *nilpotente* si :

- ☐ Elle commute avec toutes les autres matrices.
- ☐ L'une de ses puissances entières est nulle.
- ☐ L'une de ses puissances entières est l'identité.
- ☐ Sa trace est nulle.
- ☐ Elle est égale à sa transposée.
- ☐ Elle est égale à l'opposé de sa transposée.
- ☐ Aucun des choix précédents.

10. L'ensemble des solutions d'un système linéaire peut être :

- ☐ Un espace vectoriel.
- ☐ Un espace affine.
- ☐ Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Les trois choix ci-dessus sont possibles.
- ☐ Aucun des choix précédents.

11. La méthode du pivot de Gauss consiste à trigonaliser le système linéaire, puis de résoudre les équations restantes :

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

• Tout espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$:

- ☐ vrai
- ☐ faux

• Le rang d'une application f est :

- ☐ le nombre de colonnes linéairement indépendantes de F
- ☐ le nombre de lignes linéairement indépendantes de F
- ☐ le nombre de colonnes de F différentes de 0
- ☐ le nombre de lignes de F différentes de 0
- ☐ la dimension de l'image de f
- ☐ la dimension du noyau de f

• Si $(f(v) = 0 \Rightarrow v = 0)$, f étant une application linéaire en dimension finie, alors F est inversible :

- ☐ vrai
- ☐ faux

• Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors le projecteur p sur E_1 est tel que :

- ☐ $p^2 = p$
- ☐ $p^2 = 0$
- ☐ $p(x \in E_1) \in E_1$
- ☐ $p(x \in E_1) = 0$
- ☐ $p(x \in E_2) \in E_2$
- ☐ $p(x \in E_2) = 0$

• Le nombre réel λ est une valeur propre de f si :

- ☐ $\exists v \in E : f(v) = \lambda v$
- ☐ $\exists v \in E^* : f(v) = \lambda v$
- ☐ λ est une racine du polynôme caractéristique de f
- ☐ λ est une racine du polynôme minimal de f

• Le spectre de f est défini par :

- ☐ les vecteurs de $\text{rank}(f)$
- ☐ les vecteurs de l'image de f
- ☐ l'ensemble des valeurs propres de f
- ☐ l'ensemble des vecteurs propres de f

• Le polynôme caractéristique est toujours annulateur :

- ☐ vrai
- ☐ faux

• $P[X] = 2X^2 + X - 1$ est scindé dans $\mathbb{R}$:

- ☐ vrai
- ☐ faux

• $P[X] = X^2 + X + 1$ est scindé dans $\mathbb{R}$:

- ☐ vrai
- ☐ faux

• F est diagonalisable si :

- ☐ le polynôme caractéristique de f s'annule en F
- ☐ le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples
- ☐ le polynôme minimal de f est scindé à racines simples
- ☐ ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

• Dans $\mathbb{C}$, F peut s'écrire par blocs avec uniquement des blocs de $\text{Vect}\{\mathbb{I}\}$, ou la somme de tels blocs et d'un bloc nilpotent :

- ☐ vrai
- ☐ faux

• Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé :

- ☐ vrai
- ☐ faux

• Dans $\mathbb{C}$, toute matrice est diagonalisable :

- ☐ vrai
- ☐ faux

• Si $[F_1, F_2] = 0$, alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de F_1 et de F_2 en même temps :

- ☐ vrai
- ☐ faux

Questionnaire d'auto-évaluation

- Une forme bilinéaire transforme :

- ☐ un couple de vecteurs en vecteur
- ☐ un couple de vecteurs en scalaire
- ☐ un couple de scalaires en vecteur
- ☐ un couple de scalaires en scalaire

- L'action d'une forme bilinéaire $B(x, y)$ peut s'écrire sous la forme ${}^T X \cdot B \cdot Y$:

- ☐ vrai
- ☐ faux

- Si B est une forme bilinéaire, alors $B(x, y)^2 \geq B(x, x)B(y, y)$:

- ☐ vrai
- ☐ faux

- Si $B(., .)$ est une forme bilinéaire, alors il est possible de lui attribuer de façon unique une matrice B dans une base donnée :

- ☐ vrai
- ☐ faux

- Un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ est une forme (i) bilinéaire, (ii) symétrique, (iii) positive :

- ☐ vrai
- ☐ faux

- Il est possible de définir le produit scalaire de deux fonctions d'une variable réelle :

- ☐ vrai
- ☐ faux

- Si M et N sont des matrices, il est possible de donner du sens à l'assertion suivante : $M \perp N$

- ☐ vrai
- ☐ faux

- Soit N une norme. L'inégalité triangulaire s'écrit :

- ☐ $N(x)^2 + N(y)^2 = N(x + y)^2$
- ☐ $N(x)^2 + N(y)^2 \leq N(x + y)^2$
- ☐ $N(x)^2 + N(y)^2 \geq N(x + y)^2$
- ☐ $N(x) + N(y) = N(x + y)$
- ☐ $N(x) + N(y) \leq N(x + y)$
- ☐ $N(x) + N(y) \geq N(x + y)$

- La famille de vecteurs $\{(100), (020), (003)\}$ est :

- ☐ Une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$
- ☐ Une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
- ☐ Une base ni orthogonale ni orthonormale de $\mathbb{R}^3$
- ☐ Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$

- Si $M \in O(n)$, alors $(M \cdot x | M \cdot x) = (x | x)$:

- ☐ vrai
- ☐ faux

TD1 : Espaces vectoriels

Exercice 1 : Lois de composition interne

Rappel : Une loi de composition interne $*$ sur un espace E est une loi telle que toute combinaison $a * b$ de deux éléments de E soit un élément de E .

Définition : Un *groupe* $(E, *)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne

- (i) associative,
- (ii) qui admet un élément neutre,
- (iii) dont chaque élément possède un inverse *qui est un élément de E* .

Pour les couples ensembles et de lois suivantes, déterminer 1) si la loi est bien une loi de composition interne pour cet ensemble, et 2) si les ensemble munis de ces lois sont des groupes. Si non, existe-t-il un moyen simple de modifier ces ensembles pour en faire des groupes ?

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| • $(\mathbb{N}, +)$ | • $(\mathbb{Z}^*, \times)$ | • $(\mathbb{R}^*, +)$ |
| • $(\mathbb{Z}, +)$ | • $(\mathbb{Q}, +)$ | • $(\mathbb{R}^*, \times)$ |
| • $(\mathbb{N}, \times)$ | • $(\mathbb{Q}^*, \times)$ | |
| • $(\mathbb{Z}, \times)$ | • $(\mathbb{R}, +)$ | |

Exercice 2 : Familles de vecteurs

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Quels espaces vectoriels engendrent-elles ?

- | | | |
|--------------------------------|---|--|
| • $(\vec{e}_x)$ | • $(2\vec{e}_x + \vec{e}_y, \vec{e}_y)$ | • $(3\vec{e}_x + \vec{e}_y, \vec{e}_y + \vec{e}_z, \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ |
| • $(\vec{e}_x, 2\vec{e}_x)$ | • $(3\vec{e}_x - \vec{e}_y, \vec{e}_x + \vec{e}_y)$ | • $(5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z,$ |
| • $(\vec{e}_x, -\vec{e}_x)$ | • $(3\vec{e}_x - \vec{e}_y, -27\vec{e}_x + 9\vec{e}_y)$ | $- 9\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 3\vec{e}_z,$ |
| • $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ | • $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ | $- 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ |
| • $(5\vec{e}_x, -10\vec{e}_y)$ | • $(2\vec{e}_x + \vec{e}_y, -\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ | |

Exercice 3 : Quelques applications en physique

Partie 1 : Mécanique céleste

- 1) Considérons deux objets massifs. Quelle force s'exerce entre eux ? Quelle propriété a alors la trajectoire du second objet dans le référentiel du premier ?

- 2) Après avoir choisi une famille de vecteurs appropriée pour décrire le mouvement, donner une base de l'espace vectoriel dans lequel s'inscrit la trajectoire. Donner sa dimension.
- 3) L'espace vectoriel ainsi engendré remplit-il l'espace ? Si oui, justifier. Sinon, compléter la base précédente de manière adaptée à la description de l'espace comme la somme directe de deux espaces vectoriels que l'on précisera.

Partie 2 : Mouvement d'une particule chargée

- 1) Soit q une charge ponctuelle. Elle est placée dans un champ électrique uniforme et constant $\vec{E} = E \vec{e}_z$. En supposant que $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$, déterminer la trajectoire de la particule ainsi que l'espace vectoriel dans lequel celle-ci s'inscrit. Donner une base de cet espace vectoriel ainsi que sa dimension. Remplit-il l'espace ? Si oui, justifier. Sinon, compléter cette base en une base adaptée à la décomposition de l'espace en une somme directe dont un membre est l'espace vectoriel engendré par la trajectoire de la particule.
- 2) Répondre aux mêmes questions si $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_z$.
- 3) Répondre aux mêmes questions si $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_y$.
- 4) Considérons cette fois qu'au lieu d'un champ électrique, la particule est soumise à un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B \vec{e}_z$. Répondre aux mêmes questions si $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_y$.
- 5) Répondre aux mêmes questions si $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_y + v_1 \vec{e}_z$.

Exercice 4 : Changements de base

Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans les nouvelles bases décrites ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1)

2)

3)

$$\begin{cases} \vec{e}'_x = \vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z \\ \vec{e}'_y = 2\vec{e}_z \\ \vec{e}'_z = \vec{e}_x \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}'_x = 2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \\ \vec{e}'_y = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y \\ \vec{e}'_z = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}'_x = \vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z \\ \vec{e}'_y = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y \\ \vec{e}'_z = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z \end{cases}$$

TD2 : Opérations sur les matrices

Exercice 1 : Identité d'Hamilton-Jacobi

Démontrer la loi suivante appelée identité d'Hamilton-Jacobi.

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (1)$$

Exercice 2 : Rotations dans le plan

- 1) Écrire la matrice de changement de base $P(\theta)$ qui permet de passer de $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ à un repère tourné d'un angle θ .
- 2) Quelle est l'action de $P(\theta)$ sur $\vec{e}_x$? Sur $\vec{e}_y$? Sur un vecteur quelconque ?
- 3) Calculer $[P(\theta), P(\phi)]$. Ce résultat vous paraît-il cohérent ?
- 4) Calculer ${}^T P(\theta) \times P(\theta)$.

Exercice 3 : Matrices de Pauli

Les matrices de Pauli sont les trois matrices suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- 1) On définit l'opération † par la prise de la transposée et du complexe conjugué d'une matrice. Calculer $\sigma_i^\dagger \sigma_i$.
- 2) Montrer que $\{\mathbb{I}, \sigma_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ est une base de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$.
- 3) Soient $s_j = -\frac{i}{2} \sigma_j$. Calculer $[s_i, s_j]$. On pourra introduire le *symbole de Levi-Civita* ε_{ijk} qui est égal à 1 si i, j , et k sont rangés dans l'ordre des entiers, ou une permutation de signature positive de ces indices (par exemple $i = 1, j = 2, k = 3$, ou $i = 3, j = 1, k = 2$), et -1 sinon (par exemple $i = 1, j = 3, k = 2$).
- 4) Calculer $\{\sigma_i, \sigma_j\}$, où $\{.,.\}$ est l'anticommutateur défini par $\{A, B\} = AB + BA$.
- 5) Puisque les puissances d'une matrice sont définies, on admettra qu'il est possible de définir une *exponentielle matricielle* à partir de la série entière définissant l'exponentielle est les puissances d'une matrice :

$$\exp(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{j!}. \quad (3)$$

Calculer $\exp(i\alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$, où $\|\vec{n}\| = 1$, $\vec{\sigma}$ est un vecteur de coordonnées $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, et $\cdot$ agit comme un produit scalaire.

- 6) À partir des propriétés des matrices de rotation mises en évidence dans l'exercice précédent, exprimer une rotation autour de l'axe $\vec{e}_y$ en fonction des matrices de Pauli.

Exercice 4 : Rotations à trois dimensions

- 1) À partir des résultats des exercices précédents, donner une famille génératrice de l'ensemble des matrices de rotation dans l'espace à trois dimensions. On admettra que le produit de deux rotations est une rotation.
- 2) Ces matrices commutent-elles entre elles ?
- 3) En admettant que, de même que dans le cas à deux dimensions, les rotations dans l'espace peuvent se mettre sous la forme :

$$R(\theta) = \exp(\theta \hat{T}),$$

où $\hat{T}$ est une matrice, donner une base de l'ensemble dans lequel évoluent les $\hat{T}$.

- 4) Soient $\{T_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ les matrices de la base précédente. Quelles relations de commutation vérifient-elles ?

Exercice 5 : Décomposition irréductibles des matrices dans l'espace

- 1) Montrer que :

$$\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) = \text{Vect}(\mathbb{I}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n^*(\mathbb{R}), \quad (4)$$

où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques, et $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle.

- 2) Appliquer ce théorème aux lois de déformation d'un solide élastique.
- 3) Appliquer ce théorème aux lois de déformation d'un liquide Newtonien.

TD3 : Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 9x + 2y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 9x + 21y = 15 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \\ 5x - y + 2z = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -4x + 13y + 3z = 11 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5x - 2y + 7z = 0 \\ -11x + y + z = 1 \\ 6x + 12y - 20z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = 1 \\ 3x + 2y + z - t = 0 \\ 4x - 3y - z + t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 7y - 4z + w = 2 \\ 2x - y - 2z + 3w = 3 \\ 4x + 3y - 5z + 2w = 5 \\ 3x + 2y + z + 5w = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 4z = 5 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2y - 10z = 13 \\ 2x - 2y - 4z = 8 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la méthode de la matrice augmentée :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 10x - 9y = 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = 5 \\ 5x + 8y - 4z = -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ x - 4y + 2z = 4 \\ 5x + 8y - 4z = 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 4 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 3z - w = 0 \\ 3x + 3y + 3z + 3w = 1 \\ 4x + 2w = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x - y - 5z = 2 \\ -5x + 4y + 14z = 1 \\ 3x - y - 7z = 5 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 17 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & -9 & 5 \\ -4 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & -9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

La prochaine série est à réaliser en faisant un minimum de calculs :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Exercice 4 :

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la règle de Cramer :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 5y = 3 \\ -2x + y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = -5 \end{cases},$$
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ -3x + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -x + 2y - z = -2 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv/c) \end{cases}, \quad \begin{cases} A - B = -1 \\ ikA - KB = ik \end{cases}$$

Exercice 5 :

Inverser les matrices suivantes en passant par la comatrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Inverser les matrices suivantes en passant par la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

TD4 : Applications linéaires en dimension finie

Exercice 1 : Applications linéaires et matrices

Donner les matrices associées aux applications linéaires suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x & -y \\ x & +2y \end{pmatrix} \quad , \quad f_2 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & +2y & +3z \\ y \end{pmatrix} ,$$
$$f_3 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & & +2z \\ x & -2y & \\ 2x & +y & -2z \end{pmatrix} .$$

Donner les applications linéaires associées aux matrices suivantes :

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad F_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2 : Noyaux et images

Trouver les noyaux et images des applications linéaires suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x & -y \\ x & +2y \end{pmatrix} \quad , \quad f_2 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & +2y & +3z \\ y \end{pmatrix} ,$$
$$f_3 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & & +2z \\ x & -2y & \\ 2x & +y & -2z \end{pmatrix} \quad , \quad f_4 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x & +3z \\ y & +2z \\ 2x & -z \end{pmatrix} ,$$
$$f_5 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y & \\ x & +z \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad f_6 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3 : Diagonalisation

Diagonalisez si possible les matrices suivantes. (*Plus précisément, trouvez la forme diagonale de ces matrices. Les matrices de changement de base associées ne sont pas demandées.*)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 4 : Projecteurs

Soit P_N la matrice carrée de taille N dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 1) Exprimer P_N^2 en fonction de P_N .
- 2) Posons $\mathcal{P}_N = \lambda P_N$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comment doit-on choisir λ pour que $\mathcal{P}_N$ soit un projecteur ?
- 3) Quelles sont les valeurs propres de $\mathcal{P}_N$ (*les multiplicités associées ne sont pas demandées ici*) ?
- 4) $\mathcal{P}_N$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donner sa forme diagonale.
Indice : On pourra s'aider du rang de $\mathcal{P}_N$.
- 5) Quel est le projecteur sur l'espace orthogonal à celui de $\mathcal{P}_N$?

Exercice 5 : Inversion et polynôme caractéristique

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 1) M est-elle inversible ?
- 2) Calculer M^{-1} .
- 3) Généraliser le calcul précédent à une dimension quelconque.

Exercice 6 : Diagonalisation des matrices définies par des séries

Soit M une matrice de taille n dont toutes les valeurs propres $\{\mu_k\}_{1 \leq k \leq n}$ sont réelles et non dégénérées. Les vecteurs propres associés sont notés $\{v_k\}_{1 \leq k \leq n}$.

- 1) La série $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \mu_k^m$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

- 2) Que vaut $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} M^m \cdot v_k$?
- 3) Grâce à ces résultats, il est possible de définir la matrice $\mathcal{E}(z) = e^{zM}$. Montrer que $\mathcal{E}(z+z') = \mathcal{E}(z) \cdot \mathcal{E}(z')$.
- 4) Quelle est l'inverse de $\mathcal{E}(z)$?
- 5) Que peut-on dire de $\mathcal{E}(it)$, $t \in \mathbb{R}$?
- 6) Que vaut $\mathcal{E}(it)^\dagger$?
- 7) Soient $H \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, diagonalisable, à valeurs propres réelles, $z \in \mathbb{C}$, et $R(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} z^{-(m+1)} H^m$.

Notons $\text{Sp}(H) = \{E_\lambda\}$.

Pour quelles valeurs de z $R(z)$ est-elle définie (*trouver une condition sur z pour que la formule donnant $R(z)$ ait un sens*) ? Dans ce cas, comment simplifier l'écriture de $R(z)$?

Remarque : La matrice $R(z)$ s'appelle la matrice résolvante. Elle sert à résoudre des équations différentielles vectorielles.

TD5 : Applications du produit scalaire sur les espaces de fonctions

Exercice 1 : Formes bilinéaires induites par des matrices

Les matrices suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Décomposition en ondes planes

Soit $\mathcal{S}$ (espace de Schwarz) l'ensemble des fonctions à décroissance rapide définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^k f(x)| = 0,$$

avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$.

- 1) Montrer que $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
- 2) $\mathcal{S}$ est muni du produit suivant :

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx,$$

où $f^*(x)$ est le conjugué de $f(x)$.

Soient $e_k : x \mapsto e^{-ikx}$. Montrer que la famille $\{e_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

- 3) Montrer que $\{e_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}$.
- 4) Que peut-on en conclure ?
- 5) Montrer que la famille $\{e_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ est orthogonale.
- 6) Est-elle normée ?

7) Quelle est l'interprétation physique des $\{e_k\}_{k \in \mathbb{R}}$?

8) Soit l'équation de d'Alembert :

$$\square \varphi(x, t) = 0.$$

En quoi la décomposition sur $\{e_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ est-elle intéressante ?

9) Discuter de la pertinence d'une telle décomposition pour étudier l'équation de Sine-Gordon :

$$\square \varphi(x, t) = \sin(\varphi(x, t)).$$

Exercice 3 : L'opérateur dérivation

Cet exercice a pour but de vous faire changer votre regard sur la dérivée. Bien que vous connaissiez celle-ci comme la limite du taux d'accroissement d'une fonction, nous allons ici la considérer comme un *opérateur* qui agit sur les fonctions, vues comme un ensemble de *vecteurs*.

Soit D l'opérateur défini sur $\mathcal{S}$, restreint ici aux fonctions d'une variable réelle, par :

$$D : f \mapsto \frac{df}{dx}.$$

1) D est-elle une application linéaire ?

2) Quelles sont ses valeurs propres ? Ses vecteurs propres ?

3) En déduire les solutions de $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y^{(6)} - 14y^{(4)} + 49y'' - 36y = 0$, où y est une fonction d'une variable réelle.

4) $\mathcal{S}$ est muni du produit scalaire suivant :

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx,$$

D est-il un opérateur auto-adjoint ?

5) D préserve-t-elle la norme canonique induite par le produit scalaire ? On pourra prendre pour exemples une fonction gaussienne et une fonction exponentielle.

6) Soit g définie par :

$$g : f \mapsto \sqrt{2} \cdot \theta \cdot f,$$

où θ est la fonction de Heaviside. Montrer que g préserve la norme sur $\mathcal{S}^+$, défini comme l'ensemble des fonctions *paires* à décroissance rapide.

Bilan des compétences exigibles

Compléments de mathématiques (2023)

★ Cours n°1 : Des vecteurs aux matrices :

- ☐ La définition étant donnée, savoir déterminer si un ensemble muni d'une ou deux lois de composition est un groupe, un espace vectoriel, ou un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné.
- ☐ Connaître les définitions des familles de vecteurs libres, liées, génératrices, d'une base, de la dimension d'un espace vectoriel. Savoir déterminer si une famille de vecteurs donnée est libre ou liée.
- ☐ Savoir donner une base d'un espace vectoriel de dimension finie, savoir déterminer l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs à deux ou trois dimensions.
- ☐ Connaître la définition de la somme directe de deux espaces vectoriels. Savoir choisir une base adaptée à une telle décomposition à trois dimensions.
- ☐ Savoir écrire une matrice de changement de base, et utiliser une telle matrice pour calculer les coordonnées d'un vecteur dans la nouvelle base dans des exemples à trois dimensions.

★ Cours n°2 : Opérations sur les matrices :

- ☐ Connaître les définitions de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$, ainsi que les dimensions associées, sauf pour $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.
- ☐ Savoir additionner et multiplier des matrices sur $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Étant donnée la définition d'un groupe/espace vectoriel, savoir déterminer si un ensemble de matrices muni d'une ou deux lois de composition est un groupe/espace vectoriel.
- ☐ Connaître la définition de l'associativité et la commutativité d'une loi de composition interne.
- ☐ Savoir calculer le commutateur/l'anticommutateur de deux matrices.
- ☐ Connaître les définitions de la transposition et de la trace, et savoir les utiliser sur des matrices de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Savoir appliquer la relation de changement de base aux matrices.
- ☐ Connaître la définition de la nilpotence. Savoir déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente.
- ☐ *En étant guidé*, savoir calculer les puissances successives d'une matrice, et *avec de l'aide*, savoir les utiliser pour comprendre comment fonctionne un opérateur défini par une série sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

★ **Cours n°3 : Résolution de systèmes linéaires :**

- ☐ Connaître la méthode du pivot de Gauss.
- ☐ Savoir résoudre un système linéaire à deux ou trois inconnues à l'aide d'une méthode au choix.
- ☐ Savoir calculer le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- ☐ Savoir déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible, et calculer son inverse à l'aide d'une méthode au choix.

★ **Cours n°4 : Applications linéaires en dimension finie :**

- ☐ Connaître la définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme.
- ☐ Savoir que tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Savoir associer une matrice F à une application linéaire f , et réciproquement.
- ☐ Connaître la définition du rang d'une famille de vecteur, savoir le calculer pour une famille d'au plus trois vecteurs.
- ☐ Connaître les définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire, ainsi que le théorème du rang.
- ☐ Savoir définir un projecteur. Connaître sa propriété d'idempotence, et savoir calculer son image.
- ☐ Connaître les définitions des notions suivantes : valeur propre, vecteur propre, spectre, sous-espace propre associé à une valeur propre, diagonalisation, trigonalisation, polynôme caractéristique, polynôme minimal, multiplicité d'une valeur propre.
- ☐ Connaître le lien entre polynôme caractéristique, polynôme minimal, et valeurs propres, ainsi que celui qui lie la multiplicité d'une valeur propre à la dimension du sous-espace propre associé.
- ☐ Savoir calculer le polynôme caractéristique d'une matrice, d'une application linéaire.
- ☐ Connaître la définition du caractère scindé d'un polynôme. Savoir déterminer si un polynôme donné est scindé sur $\mathbb{R}$. Savoir que tous les polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$.
- ☐ Connaître les théorèmes fondamentaux sur la diagonalisation, la trigonalisation, ainsi que le théorème de Cayley-Hamilton.
- ☐ Savoir que deux matrices qui commutent sont co-diagonalisables.
- ☐ Connaître la définition d'un bloc de Jordan. Savoir mettre une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sous forme de blocs de Jordan (sans expliciter la matrice de changement de base).

★ **Cours n°5 : Applications bilinéaires et espaces euclidiens :**

- ☐ Connaître la définition d'une forme bilinéaire, d'une forme symétrique, antisymétrique, positive, définie positive. Savoir déterminer si une forme bilinéaire donnée remplit ces critères.
- ☐ Connaître la définition d'un produit scalaire. Savoir déterminer si une forme bilinéaire donnée est associée à un produit scalaire.
- ☐ Savoir manipuler le produit scalaire induit par une matrice.
- ☐ Connaître la définition d'une norme, de la norme induite par un produit scalaire. Savoir vérifier qu'une forme linéaire donnée est une norme.
- ☐ Connaître la définition d'une distance, de la distance canoniquement associée à une norme. Savoir vérifier qu'une forme bilinéaire est une distance. Savoir calculer la distance entre un vecteur et un espace vectoriel.
- ☐ Connaître les définitions d'une base orthogonale, d'une base orthonormale. Connaître l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Savoir retrouver les identités simples (identité de polarisation, du parallélogramme, ...) sans toutefois connaître ces identités par cœur.
- ☐ Connaître la définition de l'orthogonalité. Savoir déterminer si un vecteur/espace est orthogonal à un autre vecteur/espace.
- ☐ Connaître les définitions d'espace orthogonal, de supplémentaire orthogonal, savoir quand ceux-ci sont uniques, ainsi que la définition du projecteur orthogonal associé à une somme directe orthogonale.
- ☐ Connaître la définition des groupes $O(n)$ et $SO(n)$. Savoir déterminer si un opérateur appartient à l'un de ces groupes. Savoir que les applications orthogonales conservent la norme.
- ☐ Connaître la définition de l'adjoint d'un endomorphisme, d'un endomorphisme auto-adjoint. Savoir déterminer si un endomorphisme donné est auto-adjoint.
- ☐ Connaître les liens entre propriété d'auto-adjonction, trigonalisation sur $\mathbb{R}$, mise des sous-espaces propres en somme directe orthogonale. Connaître le théorème de diagonalisation des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- ☐ Connaître les définitions de $U(n)$, $SU(n)$. Savoir déterminer si un opérateur donné appartient à l'un de ces groupes. Connaître le théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes.

Examen blanc : Compléments de mathématiques

Date de rendu : 07/11/2023

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

Questions de cours : Définir en une phrase les notions suivantes : famille libre de vecteurs, famille liée de vecteurs, base d'un espace vectoriel.

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

- 1) $\dim(\text{Vect}(\{\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\})) = 3$.
- 2) La loi d'addition sur les matrices est commutative.
- 3) La loi de multiplication sur les matrices est associative.
- 4) Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$$A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow [A, B] = 0.$$

- 5) Toute application linéaire en dimension n peut être associée à une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Exercice d'application :

- 1] Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} . \quad (1)$$

- 2] Inverser la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problème : Algèbre de Heisenberg

En mécanique quantique, l'évaluation de la position et de l'impulsion des particules se fait via des opérateurs qui peuvent être étudiés sous forme matricielle, ce qui leur confère des propriétés inhabituelles et permet l'existence de comportements bien différents de ceux des particules classiques. Ce problème propose d'étudier quelques propriétés de ces matrices.

Considérons les trois matrices suivantes :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Lesquelles parmi ces matrices sont nilpotentes ? Le montrer par le calcul.
- 2) Calculer $[h_1, h_2]$, $[h_2, h_3]$ et $[h_3, h_1]$. Ces trois relations de commutation définissent l'*algèbre de Heisenberg*.
- 3) Par analogie avec les nombres réels, il est possible de définir une exponentielle agissant sur les matrices à partir de sa série entière. Lorsque cette somme converge, l'exponentielle de M est définie par :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

Calculer $\exp \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Indice : On utilisera autant que possible les résultats déjà établis pour simplifier le calcul.

- 4) Un ensemble, muni d'une loi de composition interne est appelé *groupe* si la loi de composition vérifie les propriétés suivantes :
 - (i) elle est associative.
 - (ii) elle admet un élément neutre.
 - (iii) tout élément admet un inverse qui est un élément du groupe.

Montrer que $(H_3(\mathbb{R}), \times)$, où $H_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices s'écrivant $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est un groupe. Ce groupe s'appelle le *groupe de Heisenberg*.

- 5) La multiplication dans $H_3(\mathbb{R})$ est-elle commutative ?

• **Bonus** : Application

En mécanique quantique, l'état d'un système peut être représenté par un vecteur, appelé *vecteur d'état*. Les différentes transformations appliquées au système peuvent alors être représentées par des matrices agissant sur le vecteur d'état.

Dans la suite, nous admettrons que la mesure de la position d'une particule quantique peut être représentée par un opérateur, $\hat{x}$, et la mesure de son impulsion par un opérateur $\hat{p}$ qui vérifient :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \hbar \mathbb{I}, \quad (2)$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, et $\mathbb{I}$ l'opérateur identité.

6) Montrer que $\hat{x}$, $\hat{p}$, et un troisième opérateur que l'on précisera vérifient les relations de commutation de l'algèbre de Heisenberg établies dans 2) ci-dessus.

Dans la suite de ce problème, nous allons examiner deux opérateurs particuliers : l'opérateur $e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}$, dont on admettra qu'il correspond à modifier l'impulsion de la particule de la façon suivante : $p \mapsto p + \alpha$, autrement dit cet opérateur impose un décalage en fréquence de l'onde associée à la particule ; et l'opérateur $e^{i\beta\hat{p}/\hbar}$, dont on admettra qu'il correspond à imposer une translation du système $x \mapsto x + \beta$.

Puisque la multiplication matricielle n'est généralement pas commutative, la relation de morphisme de l'exponentielle : $e^{a+b} = e^a e^b$ n'est plus vérifiée a priori si a et b sont des matrices. Dans ce cas, il est possible d'établir le résultat suivant, appelé *relation de Baker-Campbell-Hausdorff* :

$$e^X e^Y = e^Z \quad \Rightarrow \quad Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots, \quad (3)$$

où ... sont des termes mettant en jeu un plus grand nombre de commutateurs imbriqués.

7) Montrer la relation suivante, connue sous le nom de *théorème de Stone-von Neumann* :

$$e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar} = e^{-i\alpha\beta/\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}. \quad (4)$$

La signification de ce résultat est la suivante : puisqu'en mécanique quantique, contrairement à la mécanique classique, les opérateurs représentant les mesures de position et d'impulsion ne commutent pas, l'ordre dans lequel s'effectuent la translation et le décalage en fréquence d'une particule est important. En effet, suivant l'ordre dans lequel ces deux transformations sont appliquées, le vecteur d'état du système est affecté d'un facteur de phase $e^{i\alpha\beta/\hbar}$ supplémentaire.

Questions hors barème : (ne comptent pas dans les 1h30 de composition).

- 1) J'ai trouvé cette évaluation : trop facile, facile, ni facile ni difficile, difficile, trop difficile.
- 2) J'ai trouvé cette évaluation : trop courte, assez courte, de longueur adaptée, assez longue, trop longue.

Examen blanc : Compléments de mathématiques

Correction

Questions de cours : (8 points)

Définir en une phrase les notions suivantes :

- famille libre de vecteurs : Une famille libre de vecteurs est une famille telle que **toute combinaison linéaire** égale au vecteur nul a **tous ses coefficients** nuls. **(1 point)**
- famille liée de vecteurs : Une famille de vecteurs est liée s'**il existe une** combinaison linéaire non triviale de vecteurs égale au vecteur nul. **(1 point)**
- base d'un espace vectoriel : Une base d'un espace vectoriel est une famille libre et génératrice de cet espace. **(1 point)**

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

1) $\dim\left(\text{Vect}(\{\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\})\right) = 3$.

Faux (le troisième vecteur est une combinaison linéaire des deux premiers). **(1 point)**

2) La loi d'addition sur les matrices est commutative.

Vrai (attention, il s'agit de l'addition, non de la multiplication). **(1 point)**

3) La loi de multiplication sur les matrices est associative.

Vrai. **(1 point)**

4) Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$$A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow [A, B] = 0.$$

Vrai (écrivez le). **(1 point)**

5) Toute application linéaire en dimension n peut être associée à une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Vrai. **(1 point)**

Exercice d'application : (4 points)

1] Résoudre le système suivant : **(2 points)**

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} . \quad (1)$$

N'importe quelle méthode du TD n°3 peut être appliquée. N'ayant pas relevé de grosses erreurs dans les copies, je donne simplement le résultat final :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) \right\} . \quad (2)$$

2] Inverser la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(2 points)**.

Même remarque que ci-dessus. La matrice inverse est :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} . \quad (3)$$

Problème : Algèbre de Heisenberg (8 points)

En mécanique quantique, l'évaluation de la position et de l'impulsion des particules se fait via des opérateurs qui peuvent être étudiés sous forme matricielle, ce qui leur confère des propriétés inhabituelles et permet l'existence de comportements bien différents de ceux des particules classiques. Ce problème propose d'étudier quelques propriétés de ces matrices.

Considérons les trois matrices suivantes :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1) Lesquelles parmi ces matrices sont nilpotentes ? Le montrer par le calcul. **(1 point)**

$$h_1^2 = h_2^2 = h_3^2 = 0 . \quad (4)$$

Les trois matrices sont nilpotentes.

- 2) Calculer $[h_1, h_2]$, $[h_2, h_3]$ et $[h_3, h_1]$. Ces trois relations de commutation définissent l'algèbre de Heisenberg. **(2 points)**

Il s'agit d'un simple calcul de produit matriciel, qui ne pose pas de difficulté particulière car les matrices h_i possèdent beaucoup de 0. Le résultat est alors :

$$\boxed{[h_1, h_2] = h_3 \quad , \quad [h_2, h_3] = 0 \quad , \quad [h_3, h_1] = 0} . \quad (5)$$

Petit commentaire suite à la lecture des copies : lorsqu'un commutateur est non nul dans un exercice où l'on étudie les relations de commutation dans un groupe de matrices, il est généralement crucial d'identifier cette matrice non nulle avec des matrices de l'ensemble avec lequel on travaille. Ici, il est important d'identifier h_3 dans la première relation de commutation. Sans cela, il n'était pas possible de traiter l'application en bonus.

- 3) Par analogie avec les nombres réels, il est possible de définir une exponentielle agissant sur les matrices à partir de sa série entière. Lorsque cette somme converge, l'exponentielle de M est définie par :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} .$$

Calculer $\exp \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. **(2 points)**

Indice : On utilisera autant que possible les résultats déjà établis pour simplifier le calcul.

Tout d'abord, remarquons que la matrice ci-dessus s'écrit $M = a \cdot h_1 + b \cdot h_2 + c \cdot h_3$, d'où :

$$\begin{aligned} M^2 &= (a \cdot h_1 + b \cdot h_2 + c \cdot h_3)^2 \\ &= a^2 \cdot h_1^2 + b^2 \cdot h_2^2 + c^2 \cdot h_3^2 + 2bc \cdot h_2 h_3 + 2ca \cdot h_1 h_3 + ab \cdot h_1 h_2 + ba \cdot h_2 h_1 \\ &= ab \cdot h_3 , \end{aligned}$$

où l'on a pris garde au fait que toutes ces matrices commutent sauf h_1 et h_2 , et nous avons utilisé les résultats précédents pour éliminer tous les carrés (les matrices sont nilpotentes), et la plupart des produits matriciels déjà calculés à la question 3), et qui valent 0. Finalement,

$$M^2 = ab \cdot h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Pour les mêmes raisons, $M^3 = 0$.

Finalement, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \exp(M) &= \mathbb{I} + M + \frac{M^2}{2} + 0 \\ &= \mathbb{I} + (a \cdot h_1 + b \cdot h_2 + c \cdot h_3) + \frac{1}{2} ab \cdot h_3 , \end{aligned} \quad (7)$$

soit finalement,

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & a & c + ab/2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

De manière générale, on retiendra que pour traiter un problème de calcul d'exponentielle matricielle, la première étape est de reformuler le problème pour faire apparaître le plus possible des matrices idempotentes ou nilpotentes. Pour que le calcul soit faisable, il faut pouvoir calculer M^k dans le cas général.

- 4) Un ensemble, muni d'une loi de composition interne est appelé *groupe* si la loi de composition vérifie les propriétés suivantes :
- (i) elle est associative.
 - (ii) elle admet un élément neutre.
 - (iii) tout élément admet un inverse qui est un élément du groupe.

Montrer que $(H_3(\mathbb{R}), \times)$, où $H_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices s'écrivant $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est un groupe. Ce groupe s'appelle le *groupe de Heisenberg*. **(2 points)**

Remarque après la lecture des copies : pour montrer les propriétés du groupe, par exemple l'existence de l'élément neutre, il ne suffit pas de dire que l'identité est un élément neutre, il faut également montrer que c'est un élément du groupe !

- (i) La multiplication des matrices est associative, donc sa restrictions aux matrices de H_3 l'est aussi.
- (ii) $\mathbb{I}$ est un élément neutre pour la multiplication. De plus, c'est l'élément du groupe correspondant à $a = b = c = 0$.
- (iii) La multiplication de deux éléments de H_3 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & c' + ab' + c \\ 0 & 1 & b + b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Nous pouvons déjà vérifier que H_3 est bien stable par la loi $\times$. À partir de ce résultat, nous pouvons affirmer que l'inverse de l'élément de H_3 de constantes a, b et c est l'élément de constantes $-a, -b, -c + ab$.

- 5) La multiplication dans $H_3(\mathbb{R})$ est-elle commutative ? **(1 point)**

D'après l'équation (9), la multiplication n'est pas commutative. En effet, si nous reprenons la multiplication de ces deux matrices, dans un cas, le coefficient de h_3 est $c + ab' + c'$, alors que dans le deuxième cas, cet élément est $c + a'b + c'$, qui est différent dans le cas général.

• **Bonus** : Application

En mécanique quantique, l'état d'un système peut être représenté par un vecteur, appelé *vecteur d'état*. Les différentes transformations appliquées au système peuvent alors être représentées par des matrices agissant sur le vecteur d'état.

Dans la suite, nous admettrons que la mesure de la position d'une particule quantique peut être représentée par un opérateur, $\hat{x}$, et la mesure de son impulsion par un opérateur $\hat{p}$ qui vérifient :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \hbar \mathbb{I}, \quad (10)$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, et $\mathbb{I}$ l'opérateur identité.

6) Montrer que $\hat{x}$, $\hat{p}$, et un troisième opérateur que l'on précisera vérifient les relations de commutation de l'algèbre de Heisenberg établies dans 2) ci-dessus.

Pour réussir cette question, il était primordial d'avoir identifié h_3 dans le commutateur de h_1 et h_2 à la question 2).

Le choix des représentants de l'algèbre de Heisenberg sont directement suggérés par l'énoncé. En effet, posons :

$$\boxed{h_1 = \hat{x} \text{ , } h_2 = \hat{p} \text{ , } h_3 = i \hbar \mathbb{I}} \text{ ,} \quad (11)$$

nous obtenons directement $[h_1, h_2] = h_3$. De plus, $\mathbb{I}$ commutant avec toutes les matrices, $[h_2, h_3] = 0$, et $[h_3, h_1] = 0$. Nous retrouvons donc bien les relations de commutation de l'algèbre de Heisenberg.

Dans la suite de ce problème, nous allons examiner deux opérateurs particuliers : l'opérateur $e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}$, dont on admettra qu'il correspond à modifier l'impulsion de la particule de la façon suivante : $p \mapsto p + \alpha$, autrement dit cet opérateur impose un décalage en fréquence de l'onde associée à la particule ; et l'opérateur $e^{i\beta\hat{p}/\hbar}$, dont on admettra qu'il correspond à imposer une translation du système $x \mapsto x + \beta$.

Puisque la multiplication matricielle n'est généralement pas commutative, la relation de morphisme de l'exponentielle : $e^{a+b} = e^a e^b$ n'est plus vérifiée a priori si a et b sont des matrices. Dans ce cas, il est possible d'établir le résultat suivant, appelé *relation de Baker-Campbell-Hausdorff* :

$$e^X e^Y = e^Z \quad \Rightarrow \quad Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots, \quad (12)$$

où ... sont des termes mettant en jeu un plus grand nombre de commutateurs imbriqués.

7) Montrer la relation suivante, connue sous le nom de *théorème de Stone-von Neumann* :

$$e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar} = e^{-i\alpha\beta/\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}. \quad (13)$$

La signification de ce résultat est la suivante : puisqu'en mécanique quantique, contrairement à la mécanique classique, les opérateurs représentant les mesures de position et d'impulsion ne commutent pas, l'ordre dans lequel s'effectuent la translation et le décalage en fréquence d'une particule

est important. En effet, suivant l'ordre dans lequel ces deux transformations sont appliquées, le vecteur d'état du système est affecté d'un facteur de phase $e^{i\alpha\beta/\hbar}$ supplémentaire.

Cette question est vraiment plus difficile que le niveau exigé pour l'examen, elle n'est pas à travailler en priorité. En effet, elle demande non seulement d'avoir bien compris le problème, mais également d'enchaîner plusieurs étapes sans être guidé.

La première étape consiste à bien comprendre ce qui est attendu de nous d'après l'énoncé. Le théorème de Stone-von Neumann relie deux expressions mettant en jeu des exponentielles matricielles. Nous avons également à disposition la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Le résultat du théorème suggère d'appliquer cette formule pour :

$$X = \frac{i\alpha\hat{x}}{\hbar} \quad , \quad Y = \frac{i\beta\hat{p}}{\hbar}$$

Grâce aux relations de commutation de l'algèbre de Heisenberg, et en utilisant le fait que $\mathbb{I}$ commute avec toutes les matrices, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{i\alpha\hat{x}}{\hbar} + \frac{i\beta\hat{p}}{\hbar} + \frac{1}{2} \left[\frac{i\alpha\hat{x}}{\hbar}, \frac{i\beta\hat{p}}{\hbar} \right] + \frac{1}{12} \left[\frac{i\alpha\hat{x}}{\hbar}, \left(-\frac{\alpha\beta}{\hbar^2} \right) \cdot i\hbar\mathbb{I} \right] - \frac{1}{12} \left[\frac{i\beta\hat{p}}{\hbar}, \left(-\frac{\alpha\beta}{\hbar^2} \right) \cdot i\hbar\mathbb{I} \right] + \dots \\ &= \frac{i\alpha\hat{x}}{\hbar} + \frac{i\beta\hat{p}}{\hbar} - \frac{i\alpha\beta}{2\hbar} \cdot \mathbb{I} + 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Maintenant, remarquons une deuxième propriété de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff : si $[X, Y] = 0$, alors $e^{X+Y} = e^X e^Y$. En particulier, si $Y \propto \mathbb{I}$, alors cette égalité est valable.

Appliquons nos résultats précédents au membre de gauche de l'équation du théorème :

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar} &= e^{i\alpha\hat{x}/\hbar + i\beta\hat{p}/\hbar - i\alpha\beta/2\hbar\mathbb{I}} \\ &= e^{-i\alpha\beta/2\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar + i\beta\hat{p}/\hbar} . \end{aligned} \quad (15)$$

De même,

$$\begin{aligned} e^{i\beta\hat{p}/\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} &= e^{i\alpha\hat{x}/\hbar + i\beta\hat{p}/\hbar + i\alpha\beta/2\hbar\mathbb{I}} \\ &= e^{i\alpha\beta/2\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar + i\beta\hat{p}/\hbar} , \end{aligned} \quad (16)$$

où la différence de signe vient du fait que X et Y ont échangé leurs rôles dans ce cas, donc leur commutateur change de signe.

Finalement,

$$e^{i\alpha\hat{x}/\hbar + i\beta\hat{p}/\hbar} = \boxed{e^{-i\alpha\beta/2\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} = e^{i\alpha\beta/2\hbar} \cdot e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} \cdot e^{i\beta\hat{p}/\hbar}} . \quad (17)$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

Compléments de mathématiques

Examen session 1 : 21/12/2023

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

Questions de cours (8 points) : Définir en une phrase les notions suivantes : produit scalaire, matrice orthogonale, endomorphisme.

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

- 1) $\dim(\text{Ker}(f)) - \dim(E) = \dim(\text{Im}(f))$.
- 2) Le polynôme caractéristique est toujours un polynôme annulateur.
- 3) p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
- 4) Le polynôme $5X^2 + 2X + 3$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
- 5) Toute application bilinéaire en dimension n peut être associée à une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Exercice d'application (4 points) :

- 1] Avec une méthode au choix, inversez la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- 2] La matrice suivante est-elle diagonalisable ? Si oui, la mettre sous forme diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problème (8 points) : Transformations du groupe de Galilée

En mécanique classique, les transformations qui permettent de changer de référentiel tout en préservant les longueurs et l'orientation des axes (donc le sens du produit vectoriel) forment un groupe, appelé *groupe de Galilée*. Ce problème propose d'étudier quelques propriétés élémentaires de la représentation matricielle des transformations de ce groupe.

Considérons d'abord les isométries de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire les transformations qui préservent les longueurs. Elles forment le groupe euclidien $E(3)$ (groupe spécial euclidien $SE(3)$ si, de plus, elles préservent l'orientation).

- 1) Comment s'appellent les matrices qui préservent l'orthogonalité et la norme des vecteurs ? Quel groupe forment-elles ? Qu'en est-il des transformations qui de plus préservent l'orientation (c'est à dire ont un déterminant égal à 1) ?
- 2) Dans le groupe des isométries se trouvent également les translations. Cependant, bien que celles-ci soient linéaires, il n'est pas si facile de trouver une écriture dans laquelle les translations et les rotations se comportent de manière compatible à ce qui est attendu. Pour cela, une façon simple est de passer d'une représentation à trois dimensions à une représentation à quatre dimensions.

Soit M la transformation qui fait subir au vecteur $\mathbf{r}$ une rotation O , puis une translation de vecteur $\mathbf{r}_0$. Que vaut $M \cdot \mathbf{r}$?

- 3) La position d'un objet est représentée par la matrice colonne $\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix}$. Afin de simplifier l'identification des coefficients, M est écrite comme une matrice définie par blocs. Dans l'expression suivante, donner la taille des blocs, et identifiez les éléments manquants.

$$M \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} ? & \mathbf{r}_0 \\ \hline \mathbf{0} & ? \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 4) Quelle est l'expression des trois matrices de rotation autour des axes principaux d'un système dans une base donnée ?
- 5) En déduire que $SO(3)$ peut être décrit par trois paramètres réels. En déduire que le groupe $SE(3)$ décrit par les matrices précédentes peut entièrement être décrit par le choix de 6 paramètres réels. *Attention, ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels !*
- 6) Quel est l'élément neutre de $(SE(3), \times)$ (l'élément e tel que $M \cdot e = e \cdot M = M$) ? Calculer M^{-1} .
- 7) Le groupe de Galilée $G(3)$ comprend une dernière série de transformations, appelés boosts, qui correspondent aux changements de référentiel galiléens (mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{v}_0$ et décalage de l'horloge de t_0). Afin de les prendre en compte, nous utilisons la même astuce que ci-dessus en ajoutant une composante de plus au vecteur position, qui devient $\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans l'expression suivante, déterminez la taille des blocs, ainsi que les éléments manquants.

$$M \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} ? & \mathbf{v}_0 & ? \\ \hline \mathbf{0} & ? & t_0 \\ \hline ? & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 8) En déduire que si G_1 est une translation d'espace (pas de rotation, pas de boost), et G_3 un boost (sans rotation ni translation d'espace), alors $[G_1, G_3] = 0$.

Compléments de mathématiques

Examen session 2 : 09/01/2024

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

Questions de cours (8 points) : Définir en une phrase les notions suivantes : polynôme minimal, matrice nilpotente, bloc de Jordan.

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

1) $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$.

3) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthogonale.

4) Si $\text{rank}(f) < n$, alors $\det(F) = 0$.

5) Dans $\mathbb{C}$, toutes les matrices sont trigonalisables.

Exercice d'application (4 points) :

1] Les matrices suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

2] La matrice suivante transforme-t-elle une base orthonormale directe en une base orthonormale directe ?

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème (8 points) : Le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{R})$

Le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, ou groupe spécial linéaire de dimension 2, est le groupe de toutes les matrices 2×2 de déterminant égal à 1.

- 1) Combien de paramètres réels indépendants sont nécessaires pour décrire toutes les matrices de ce groupe.
- 2) Montrer que si $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, et $B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, alors $A \cdot B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$.
- 3) Montrer que si $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$.
- 4) Soit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. À quel type de transformation R correspond-elle ? Quel est le nom du groupe qui rassemble toutes les matrices de cette forme ? Est-elle une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$?
- 5) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. À l'aide d'une méthode de votre choix, calculer A^{-1} .
- 6) Montrer que, si $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Rightarrow \lambda^2 - \text{Tr}(A) \lambda + 1 = 0$$

- 7) En déduire que les matrices de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ se décomposent en trois sous ensembles selon la valeur de leur trace. On pourra pour cela chercher les solutions de l'équation précédente.
- 8) Montrer que ces trois ensembles correspondent à un spectre composé de (i) deux valeurs complexes conjuguées, (ii) une racine double, pouvant prendre deux valeurs que l'on précisera, (iii) deux valeurs inverses l'une de l'autre. Attribuez ces trois cas aux trois ensembles de valeurs possibles de la trace de la matrice définis en 7).

Bonus : Les matrices de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ peuvent être décomposées suivant la décomposition dite d'Iwasawa. Dans cette décomposition, chaque matrice M de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $M = K \cdot A \cdot N$, avec

$$K \in \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0; 2\pi[\right\}, \quad A \in \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R}_+^* \right\}, \quad N \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Identifiez chaque élément de cette décomposition suivant les classes de matrices définies en 7). Démontrez qu'il est effectivement possible d'appliquer une décomposition d'Iwasawa à chaque élément du groupe spécial linéaire. On pourra commencer par vérifier que le nombre de paramètres libres est bien cohérent avec celui de la question 1), que le déterminant de $K \cdot A \cdot N$ est bien égal à un, et utiliser le fait que tout nombre réel y peut être mis sous la forme $y = \cotan(\theta)$ avec $\theta \in]0; \pi[$ pour trouver les nombres θ , r et x associés à une matrice donnée de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

L'intérêt principal de la décomposition précédente est que chacun des trois ensembles correspondent à des transformations géométriques bien identifiées (mais que l'on ne présentera pas ici), ce qui permet de donner un sens géométrique à une matrice spéciale linéaire donnée.

Examen blanc : Compléments de mathématiques

Date limite de rendu : 15/11/2024

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

Questions de cours : (8 points)

Définir en une phrase les notions suivantes : famille de vecteurs génératrice d'un ensemble, base d'un espace vectoriel, matrice triangulaire inférieure.

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

- 1) $\dim(\text{Vect}(\{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 - \vec{e}_3, -\vec{e}_3 - \vec{e}_1\})) = 3$.
- 2) Toute matrice triangulaire supérieure est diagonale.
- 3) Toute matrice triangulaire supérieure et symétrique est diagonale.
- 4) Il n'existe pas de matrice à la fois triangulaire inférieure et antisymétrique.
- 5) $\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{R})) = n - 1$.

Exercice d'application : (4 points)

1] Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 5y - 2z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases} . \quad (1)$$

2] Sachant que l'exponentielle matricielle est définie par $\exp(M) = \sum_{i=1}^n \frac{M^i}{i!}$, calculer l'exponentielle de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou justifiez si cela est impossible.

Problème : Modèle de Lorenz (8 points)

Attention : Ce problème est long, il n'est pas attendu que vous le résolviez en entier. En plus des 8 points restants, les questions supplémentaires rapportent des points en bonus qui sortent du barème de notation. Des résultats intermédiaires sont donnés à intervalle régulier, et peuvent être

utilisés directement sans démonstration. De la sorte, vous pouvez traiter les différentes parties de ce problème dans l'ordre qui vous convient le mieux. En revanche, il vous est demandé de préciser lisiblement quelle est la question que vous cherchez à résoudre.

Le modèle de Lorenz est un modèle simplifié visant à décrire l'évolution des conditions atmosphériques autour du globe, mis au point en 1963. Malgré sa formulation extrêmement simple, ce modèle est riche d'enseignement. Il a par exemple historiquement été le premier modèle à montrer que les systèmes météorologiques sont chaotiques (c'est à dire qu'une imprécision infime sur les conditions initiales peut avoir un impact majeur sur les solutions des équations dans des temps relativement courts). Ce problème propose d'étudier quelques propriétés simples de ce modèle.

Ce modèle repose sur trois variables, notées conventionnellement x , y et z , décrivant les échanges entre l'atmosphère et l'océan. Elles sont reliées respectivement à l'intensité du mouvement de convection au sein de l'atmosphère, à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et à la non-linéarité du profil de température. Leur évolution au cours du temps peut alors être décrite par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (2)$$

où σ , ρ et β sont des constantes positives.

- 1) Ce système est-il linéaire ?
- 2) Dans la suite, nous allons nous intéresser uniquement au comportement du système au voisinage de solutions stables dans le temps. Que peut-on dire du membre de gauche du système différentiel pour de telles solutions ?
- 3) Résoudre le système précédent en distinguant bien les cas $\rho \leq 1$ et $\rho > 1$, pour des raisons que l'on précisera. Deux voies sont proposées :
 - Linéarisez d'abord le système au voisinage du vecteur nul (*c'est à dire, supposez que x , y et z sont petits, négligez les termes adéquats et résolvez le nouveau système plus simple*). Quel(les) solution(s) est/sont possible(s) ? Dans le cas où $\rho > 1$, montrer que les solutions restantes sont de la forme :

$$\left(\pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right)$$

- Résolvez directement le système entier.

Bien entendu, une seule des deux propositions ci-dessus doit être choisie. La seconde voie, plus difficile, rapporte plus de points.

- 4) Dans la suite, nous appellerons P_0 , P_1 et P_2 les trois points fixes, P_0 étant le point le plus proche du vecteur nul. Afin d'étudier le comportement des solutions dans leur voisinage, il est utile de calculer la matrice J suivante, dite *matrice Jacobienne* du système : si nous appelons X le vecteur des inconnues, et V le vecteur du système, de sorte que $\frac{dX}{dt} = V(X)$ (**attention, la forme matricielle ne peut être utilisée que pour des systèmes linéaires**), alors

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

- 5) Que vaut J au point P_0 ?
- 6) Montrer que dans la base dans laquelle J est écrite, $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme la somme directe de deux espaces.
- 7) En se plaçant dans le sous-espace dont la dimension est 1, résoudre le système différentiel réduit à ce sous-espace. Qu'en déduisez vous vis-à-vis de la stabilité des solutions dans la direction z ?
- 8) Nous admettons que la stabilité dans les deux autres directions est donnée par les racines (λ_1, λ_2) du polynôme suivant :

$$X^2 + (\sigma + 1)X + \sigma(1 - \rho) \quad (4)$$

Quel est le signe de ces racines ?

BONUS : Donner leur expression.

- 9) En admettant que la conséquence du calcul précédent est qu'il existe une base dans laquelle, au voisinage de 0, le système différentiel se met sous la forme $\frac{dX'}{dt} = J' \cdot X'$, dont on remarquera qu'elle est linéaire, avec

$$J' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad (5)$$

déduire des questions précédentes la stabilité du point fixe P_0 lorsque $\rho < 1$.

- 10) Répondre à la même question si $\rho > 1$.

- 11) Donner les expressions J_1 et J_2 de J aux points fixes P_1 et P_2 identifiés précédemment.
- 12) La linéarisation du système au voisinage de P_1 et P_2 donne les résultats suivants que nous admettrons : pour $1 < \rho < \rho^*$, il existe de nouveau trois solutions réelles au problème, de sorte que J_1 et J_2 se mettent également sous forme diagonale, avec trois coefficients λ_1 , λ_2 et λ_3 négatifs. Que peut-on en déduire sur la stabilité du système au voisinage de ces deux points fixes ?
- 13) Pour $\rho > \rho^*$, λ_2 et λ_3 sont deux nombres complexes conjugués de parties imaginaires non nulles et de parties réelles positives. Conclure sur la stabilité de P_1 et P_2 dans ces régions.
- 14) Faire un schéma récapitulatif de l'existence et de la stabilité des points fixes en fonction de ρ .

Questions hors barème : (ne comptent pas dans les 1h30 de composition).

- 1) J'ai trouvé cette évaluation : trop facile, facile, ni facile ni difficile, difficile, trop difficile.
- 2) J'ai trouvé cette évaluation : trop courte, assez courte, de longueur adaptée, assez longue, trop longue.

Compléments de mathématiques

Examen session 1 : 18/12/2024

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 2h00

Questions de cours (8 points) : Définir en une phrase les notions suivantes : endomorphisme, base orthogonale, application bilinéaire.

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

1) M trigonalisable $\Rightarrow \det(M) = \prod_{i=1}^n M_{ii}$.

2) $\dim(\text{Ker } f) \geq \dim(E)$

3) $\det(f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Im } f) \neq \dim(E)$

4) $P[X] = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$.

5) Toute matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice d'application (4 points) :

1] Avec une méthode au choix, inversez la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Cette matrice est-elle diagonalisable (justifiez) ?

2] Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Problème (8 points) : Isotopomères de la molécule de thiophosgène

Avertissement : Le problème suivant traite de physique moléculaire. Aucune notion préalable dans ce domaine n'est requise pour la résolution du problème. Toutes les définitions et toutes les équations nécessaires à sa résolution sont données dans l'énoncé. Tout outil technique nécessaire à la résolution des questions se trouve dans le cours délivré au cours du semestre.

L'état fondamental de la molécule de thiophosgène CSCl_2 est plan, comme indiqué sur la figure 1. Cependant, cette dernière comporte trois *isotopomères* correspondant à des configurations stables dans lesquelles le nombre de neutrons de l'atome de chlore peut varier. Il y a donc trois possibilités : une molécule avec deux atomes ^{35}Cl , une molécule avec deux atomes ^{37}Cl et une molécule avec un atome de ^{35}Cl et ^{37}Cl .

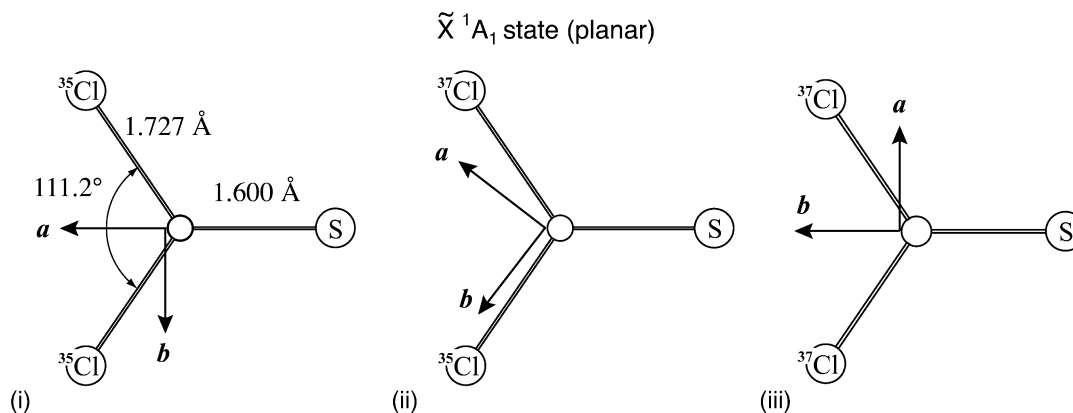


FIGURE 1 – Figure extraite de T. Fujimara et al., *Journal of Molecular Spectroscopy*, **22**, 331-340 (2005). Configurations des trois isotopomères de la molécule de thiophosgène dans son état fondamental. L'atome central, ne possédant pas de nom, est l'atome de carbone.

Dans cet exercice, nous nous intéressons aux modes de rotation de la molécule de thiophosgène. Bien entendu, ceux-ci sont affectés par la masse des atomes de chlore qu'elle comporte. Ils sont décrits par trois moments angulaires, J_a , J_b et J_c , déterminés dans les trois directions propres de la molécule : les deux premières sont données par les vecteurs **a** et **b** apparaissant sur la figure 1, le troisième axe, **c** pointant dans la direction du lecteur. Nous regroupons les trois moments angulaires sous la forme d'un vecteur :

$$J = \begin{pmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{pmatrix} \quad (2)$$

- 1) L'énergie de la molécule pour une configuration, et un ensemble de moments angulaires donnés est exprimée sous la forme :

$$E_H(J) = {}^T J \cdot H \cdot J, \quad (3)$$

où H est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quel type de fonction est E_H (il vous est demandé d'utiliser précisément la terminologie du cours) ?

- 2) Dans la base correspondant à l'isotopomère ayant deux atomes ^{35}Cl , la matrice H est diagonale :

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (4)$$

En vous basant sur les symétries du système, discutez de la possibilité que H soit encore diagonale **dans la même base** pour les deux autres isotopomères.

- 3) Toujours en raisonnant sur les symétries du problème, montrer que l'espace peut être écrit comme la somme directe de deux espaces vectoriels que l'on précisera, et telle que, pour les trois isotopomères, l'écriture de H dans une base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs.
- 4) En déduire l'écriture de la matrice de passage permettant de décrire le décalage de la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ représenté sur la figure 1.

Indice : On pourra s'aider des matrices de rotation.

- 5) L'effet d'une rotation autour de l'axe $\mathbf{c}$ sur une matrice est exprimée par l'intermédiaire de

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

par $M' = \mathcal{R} \cdot M \cdot \mathcal{R}^{-1}$. Comment s'appelle le groupe comprenant les matrices $\mathcal{R}$?

- 6) Calculer la matrice H dans une base décalée d'un angle θ_T .
- 7) Les données issues de l'analyse spectroscopique de la molécule permettent de déterminer que pour l'isotopomère $^{37}\text{Cl}^{37}\text{Cl}$, $\theta_T = 90^\circ$. Écrire H , puis E_H dans cette nouvelle base.
- 8) De même, pour l'isotopomère $^{35}\text{Cl}^{37}\text{Cl}$, $\theta_T = 38^\circ$. Écrire H , puis E_H dans cette nouvelle base. Vos résultats sont-ils cohérents avec votre pré-analyse en termes de symétries ?
- 9) Question bonus : Interprétation des spectres

Chaque état de la molécule est repéré par trois nombres, dits *nombres quantiques*, qui prennent des valeurs entières, et dont la valeur permet de spécifier les caractéristiques de l'état dans lequel la molécule se trouve. Ces nombres sont notés par exemple 5_{41} (voir figure 2). Une transition qui change la valeur du second nombre quantique est dite « de type $\mathbf{b}$ », une transition qui affecte le troisième nombre quantique est dite « de type $\mathbf{a}$ ».

Commentez l'influence de la rotation des axes de la base propre de la molécule sur le type de transition observée en vous basant sur la figure 2.

Le spectre observé lors de l'étude spectroscopique de l'isotopomère $^{35}\text{Cl}^{35}\text{Cl}$ est représenté sur la figure 3. Comment déterminer si l'inversion d'axes a bien eu lieu ?

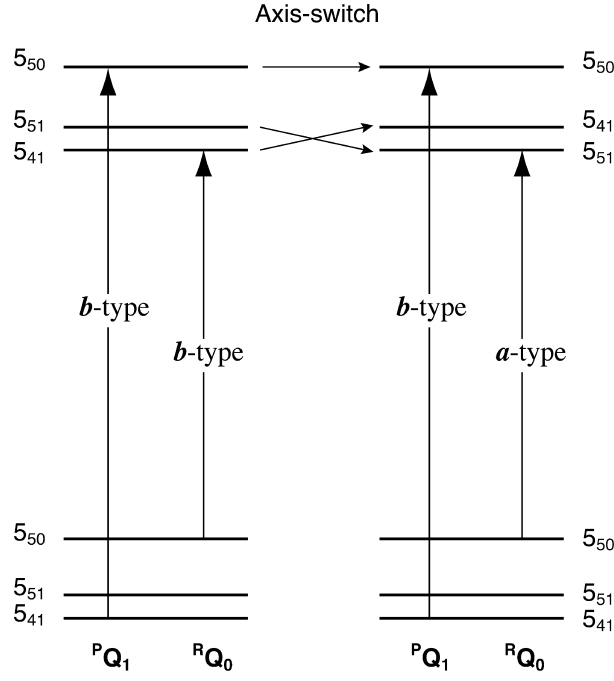


FIGURE 2 – Figure extraite de T. Fujimara et al., *Journal of Molecular Spectroscopy*, **22**, 331-340 (2005) décrivant des transitions possibles entre trois niveaux d'énergie donnés de la molécule correspondant à l'isotopomère $^{35}\text{Cl}^{35}\text{Cl}$. La colonne de gauche décrit le spectre sans axes inversés, celui de la colonne de droite le spectre après inversion des axes. Les niveaux du bas correspondent à l'état fondamental représenté sur la figure 1, ceux du haut à la configuration du premier état excité.

Formulaire :

- $\cos(38^\circ) \simeq 0.78801$
- $\sin(38^\circ) \simeq 0.61566$

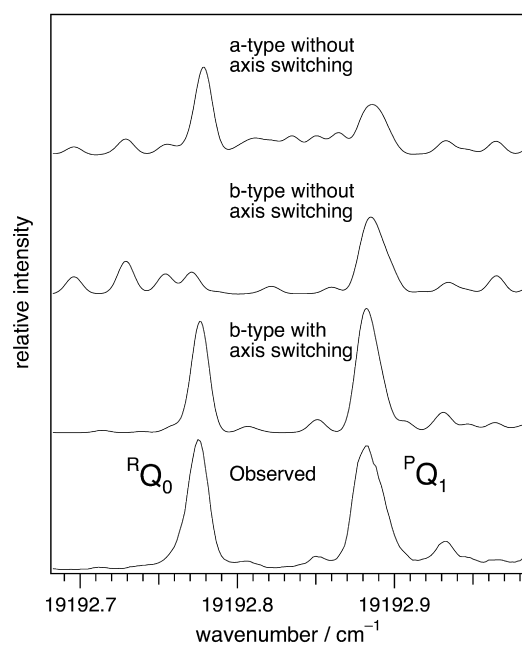


FIGURE 3 – Figure extraite de T. Fujimara et al., *Journal of Molecular Spectroscopy*, **22**, 331-340 (2005) représentant l'effet de l'inversion des axes sur le spectre de l'isotopomère $^{35}\text{Cl}^{35}\text{Cl}$.

Compléments de mathématiques

Examen session 2 : 09/01/2025

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 2h00

Questions de cours (8 points) : Définir en une phrase les notions suivantes : produit scalaire, trace d'une matrice, projecteur.

Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

1) $\dim(\text{Vect}\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_1\}) = 3$.

2) $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$

3) $\text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \{0\}$

4) $\dim(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

5) p projecteur $\Rightarrow \sum_{i=0}^n \frac{p^i}{i!} = n p$.

Exercice d'application (4 points) :

1] Les matrices suivantes définissent-elles un produit scalaire (une justification brève mais valide et suffisante est demandée) ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2] Définition : Un *groupe* est un ensemble muni d'une loi de composition interne qui :

(i) est associative ;

(ii) admet un élément neutre ;

(iii) est telle que l'inverse de chaque élément du groupe soit lui aussi un élément du groupe.

Soit le groupe *spécial linéaire* $SL(2, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ont un déterminant égal à 1. Si l'on note " $\times$ " la multiplication matricielle, $(SL(2, \mathbb{R}), \times)$ est-il un groupe ?

Problème (8 points) : Stabilité du deutéron

Avertissements :

- (i) *Le problème suivant traite de physique nucléaire. Aucune notion préalable dans ce domaine n'est requise pour la résolution du problème. Toutes les définitions et toutes les équations nécessaires à sa résolution sont données dans l'énoncé. Tout outil technique nécessaire à la résolution des questions se trouve dans le cours délivré au cours du semestre.*
- (ii) *Le problème est long. Il n'est pas attendu que vous le résolviez en entier dans le temps imparti. Des résultats intermédiaires sont régulièrement donnés et peuvent être utilisés à tout moment pour avancer dans le problème au delà d'un point de blocage sans justification.*
- (iii) *Les questions 8) et 14) sont des questions donnant lieu à l'attribution de points en bonus. La question 8) peut être raisonnablement traitée si le sujet du problème est globalement compris. En revanche, en ce qui concerne la question 14), celle-ci a un niveau de difficulté bien supérieur et il vous est fortement conseillé de vous concentrer sur les autres questions avant d'y répondre.*

Le noyau atomique est principalement constitué de protons et de neutrons. Pour expliquer la stabilité de celui-ci, il est nécessaire de comprendre comment agit *l'interaction forte* qui maintient ces éléments ensemble malgré la force électromagnétique qui n'est pas favorable à leur assemblage.

particule	masse (MeV)
proton	938.272
neutron	939.565

TABLE 1 – Masses du proton et du neutron.

Un premier pas dans la direction de la modélisation de cette force a été accompli en remarquant que les masses du proton et du neutron (données dans la table 1 en unités d'énergie, qui est l'unité courante en physique nucléaire) sont très proches l'une de l'autre. Partant du principe que le proton, contrairement au neutron, porte une charge électrique, il peut être supposé que la différence de masse observée est due à l'interaction électromagnétique et non pas à la force forte. Ainsi, du point de vue de l'interaction forte, ces deux particules sont, en première approximation, assimilées à une particule unique, avec deux *savours* différentes, modélisées par un nombre, qui par convention vaut $\pm 1/2$ (la valeur positive correspondant au proton) et porte le nom de *spin isobarique*.

• Partie 1 : Les nucléons

- 1) Nous nous plaçons dans la base $\{\text{proton}, \text{neutron}\}$, c'est à dire que le proton est représenté par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et le neutron par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner dans cette base la représentation de l'opérateur spin isobarique τ_3 (c'est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), sachant que le proton et le neutrons sont ses vecteurs propres, et que les valeurs propres associées sont les valeurs du spin isobarique données ci-dessus.

- 2) Écrire dans la même base les opérateurs τ_+ et τ_- , qui, respectivement, changent un neutron en proton et un proton en neutron. Que pouvez vous dire de leur noyau ?
- 3) Les deux opérateurs précédents sont singuliers à cause de la présence d'une valeur propre nulle dans leur spectre. Il est alors d'usage de définir les deux opérateurs suivants :

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{1}{2}(\tau_+ + \tau_-) \\ \tau_2 = -\frac{i}{2}(\tau_+ - \tau_-) \end{cases} \quad (2)$$

Calculer les commutateurs $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_2, \tau_3]$ et $[\tau_3, \tau_1]$.

- 4) Calculer les anticommutateurs $\{\tau_1, \tau_2\}$, $\{\tau_2, \tau_3\}$ et $\{\tau_3, \tau_1\}$.
- 5) Quelle est l'action de τ_1 et τ_2 sur les états proton et neutron ?
- 6) Soit $\tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$. Calculer son action sur les vecteurs proton et neutron. Calculer son commutateur avec les opérateurs τ_1 , τ_2 , τ_3 . Que peut-on en conclure ?

• Partie 2 : Systèmes de plusieurs nucléons

- 7) Nous considérons désormais un système de A nucléons, de charge $Q = Ze$. Le vecteur représentant l'état du système a désormais $2A$ composantes, chacune permettant pour chaque nucléon d'être soit un proton, soit un neutron (soit une combinaison des deux). Dans chaque sous-espace correspondant à un nucléon donné, le spin isobarique est déterminé par la matrice $\tau_3(i)$, où i est le numéro du nucléon considéré (entre 1 et A). Le spin isobarique total est représenté par l'opérateur T_3 qui se réduit dans chaque bloc correspondant à un nucléon unique à $\tau_3(i)$. Par abus de langage, nous noterons $T_3 = \sum_{i=1}^A \tau_3(i)$.

Écrire l'opérateur Q , qui à une particule associe sa charge, en fonction de $\tau_3(i)$, puis en fonction de T_3 et A .

La représentation d'un état à A nucléons nécessite en réalité deux nombres, T et T_3 . Ceux-ci respectent les règles suivantes :

- (i) L'état correspondant à T est un vecteur propre de T^2 de valeur propre $T(T+1)$.
- (ii) T ne peut prendre que des valeurs entières (positives), ou demi-entières.
- (iii) Pour une valeur de T donnée, il existe $2T+1$ états différents, formant ce que l'on appelle un *état multiplet*, qui peuvent être construit à partir de vecteurs propres de T_3 dont la valeur du spin isobarique prend successivement toutes les valeurs entre $-T$ et T , par incréments de 1.
- (vi) La création d'un état lié de deux particules de spin isobarique T et T' donne lieu à la création d'états multiplets pour toutes les valeurs comprises entre $|T-T'|$ et $T+T'$, avec un incrément de 1.

- 8) Question bonus : Pour les particules suivantes, déterminer les valeurs de T et T_3 associées. On se rappellera qu'au sein d'un même multiplet, les particules ont (quasiment) la même masse.

particule	masse (MeV)
π^+	139.59
π^0	135.00
π^-	139.59
ρ^+	770
ρ^0	770
ρ^-	770
ω	783
Λ^0	1116
Σ^+	1189
Σ^0	1192
Σ^-	1197
Ξ^0	1315
Ξ^-	1321
Ω^-	1321
Δ^{++}	1232
Δ^+	1232
Δ^0	1232
Δ^-	1232
N'^{+}	1440
N'^0	1440
Λ^*	1405
Σ^{*1}	1382
Σ^{*0}	1382
Σ^{*-1}	1387
Ξ^{*0}	1531
Ξ^{*-}	1535

TABLE 2 – Masses de différentes particules sensibles à l'interaction forte.

• Partie 3 : Systèmes deux nucléons

- 9) Le deutéron est un état caractérisé par $Q = e$ et $A = 2$. Que vaut T_3 dans son cas ?
- 10) Nous nous plaçons dans la base $\{\chi(++), \chi(+-), \chi(-+), \chi(--)\}$, où $\chi(++)$ est l'état à deux protons, $\chi(+-)$ l'état à un proton et un neutron, et ainsi de suite. Écrire T^2 dans cette base (c'est une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$). La diagonaliser.
- 11) Que vaut T_3 sur chacun des vecteurs de la base de vecteurs propres de T ainsi exhibée ? En déduire l'écriture de la matrice T_3 dans cette base. Que remarque-t-on ? Les règles énoncées plus tôt concernant T et T_3 sont-elles vérifiées ?

Indication : Attention, dans ce cas, il y a deux états multiplets différents, c'est à dire deux groupes de particules, correspondant chacun à deux valeurs de T différentes (voir règle (iv) ci-dessus).

- 12) Dans ce système, il est possible d'isoler un état singulet (une seule particule), et un état triplet (trois particules). Les écrire en fonction des vecteurs de la base initiale. Donner Q et A pour chacune des particules ainsi définies.
- 13) Pour des raisons de symétrie, l'opérateur donnant accès à l'énergie du système doit être isotrope, et commuter avec tous les opérateurs caractéristiques de l'état du système. Il est alors possible de montrer que cet opérateur s'écrit sous la forme :

$$H(T^2) = f(r) \cdot \mathbb{I} + g(r) \cdot T^2. \quad (3)$$

Pour obtenir l'énergie E d'un système, il faut agir, à droite et à gauche de cette matrice avec le vecteur représentatif de ce système. Montrer que E ne peut prendre, dans ce modèle, que deux valeurs différentes pour un système à deux nucléons dans la base adaptée à T^2 . Écrire explicitement son expression pour ces états en fonction de f et g .

- 14) Question bonus : Sachant qu'il est expérimentalement observé que le deutéron dans l'état triplet est instable, contrairement à son homologue dans l'état singulet, lequel de ces deux états correspond à l'état fondamental du deutéron ? Que peut-on en déduire sur la forme des fonctions f et g ?