Introduction à la mécanique analytique

Avant propos

Ce cours a été présenté à l'université de Perpignan Via Domitia en classe de Licence 3 dans les parcours physique-chimie et sciences pour l'ingénieur-énergie matériaux au premier semestre de l'année 2023. Le volume du cours était de 10.5 heures de cours magistral, et un nombre égal de séances de travaux dirigés.

Étant donné le faible nombre d'heures consacré à ce cours, des choix ont donc dû être fait quand à son contenu. Ainsi, l'accent a été mis sur (i) la mécanique de Lagrange, en tant que reformulation des équations de Newton sous une forme plus adaptée au traitement de problèmes avec contraintes, et (ii) le concept d'action, sa signification physique, et les conséquences classiques du principe de Hamilton. Cela s'est fait au détriment de la mécanique hamiltoniennne, qui n'est que rapidement abordée, et du formalisme de Hamilton-Jacobi, jugé trop ambitieux pour ce cours d'introduction. Nous espérons que le lecteur trouvera néanmoins de quoi satisfaire sa curiosité.

Avant de se lancer dans les profondeurs du cours, un remerciement particulier est dû à C. Gignoux et B. Silvestre-Brac, leur livre [1] ayant apporté beaucoup de matière à la présentation qui suit.

Cours n°1 : La mécanique de Lagrange

La mécanique analytique est une discipline qui se base sur des travaux entamés des les années 1740 (donc peu de temps après le décès d'Isaac Newton) afin de permettre à la fois une meilleure prise en compte des contraintes dans les problèmes de mécanique, mais également de fournir au cadre philosophique aux sciences de la nature qui soit jugé plus satisfaisant au vu des idées de l'époque. Cette approche, moins systématique que la démarche newtonienne, mais plus efficace, représente un nœud central du développement de la mécanique qui a permis l'ouverture vers bien des problèmes dans une vaste gamme de champs de la physique :

- La reformulation des problèmes de mécanique en termes d'optimisation a permis plusieurs développement du côté de l'ingénieurie.
- Le formalisme hamiltonien a permis de considérablement développer la théorie des systèmes dynamiques, notamment en mécanique céleste.
- Le traitement des ondes et des particules au sein d'un seul et unique formalisme a joué un rôle non négligeable dans la construction de la mécanique quantique.
- La généralisation de ce formalisme au cas d'un système continu a mené au développement de la théorie des champs, classique puis quantique, qui est nécessaire à la description des interactions fortes et faibles, de la physique des particules, du groupe de renormalisation

(outil développé pour la description fine des transitions de phase, notamment au voisinage des points critiques).

I] Position du problème

Exemple : Le pendule simple

Considérons un pendule simple, constitué d'une masse reliée à une tige rigide.

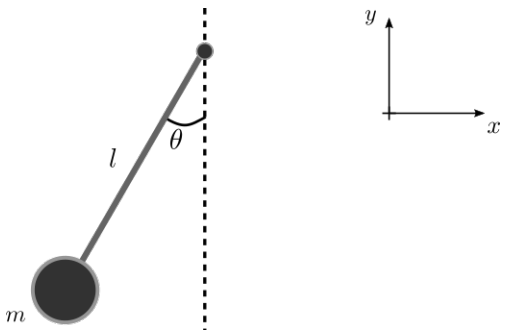


FIGURE 1 – Pendule simple

Si nous voulons poser les équations du mouvement correspondant à ce problème à partir des équations de Newton, nous obtenons deux équations. Pourtant, après réflexion, il n'est pas difficile de se convaincre que ce mouvement est en réalité un mouvement à une seule dimension. Pourquoi a-t-on une équation supplémentaire ?

En réalité, la deuxième équation sert à déterminer la force de tension de la tige $\vec{T}$, nécessaire dans ce formalisme pour assurer que la masse m décrit bien des portions de cercle. Mais cette force a donc un caractère artificiel : elle n'est pas tant déterminée par un phénomène physique fondamental que par une nécessité de *contraindre* le mouvement de la masse le long d'un arc de cercle. Ainsi, pour ce système à un seul degré de liberté, il devrait être possible de décrire le mouvement à partir d'une équation unique, correspondant à la **projection des équations de Newton dans la direction du mouvement**. Concrètement, la connaissance de la loi $\theta(t)$ est suffisante pour décrire le mouvement de la masse dans son intégralité.

En réalité, cette situation est déjà connue dans les cours de base de mécanique du point : le théorème de l'énergie cinétique, qui n'est autre que la **projection du principe fondamental de la dynamique le long de la trajectoire** permet déjà de réduire le nombre d'équations nécessaires à la description du mouvement d'un système à peu de degrés de liberté (voir annexe sur les rappels de mécanique). Remarquons dès à présent que la plupart des forces de contrainte pure, telle la tension de la tige dans le pendule simple, ou la force de réaction du support dans de nombreux problèmes de mécanique sont orthogonales au mouvement. Elles ne travaillent donc pas, et sont absente de l'équation obtenue par le théorème de l'énergie cinétique.

Résumons : pour un problème à N corps, les équations de Newton fournissent $3N$ équations différentielles d'ordre 2 couplées, mais si des contraintes sont présentes, seules $n < 3N$ équations sont nécessaires. Le but serait alors de construire un jeu de n variables décrites par $n < 3N$ équations couplées, en éliminant les variables de pure contrainte.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple ci-dessus cependant, le choix de coordonnées n'est pas restreint à des longueurs, certaines variables peuvent être des variables angulaires par exemple. Nous définissons les *coordonnées généralisées*, $\{q_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, comme un ensemble de variables, non nécessairement homogènes entre elles, qui suffisent à la description d'un mouvement. Ces coordonnées doivent être choisies de manière judicieuse, en fonction des symétries du problème, de façon à simplifier l'écriture des équations du mouvement.

L'avantage principal de l'utilisation des coordonnées généralisées est la réduction du nombre d'équations couplées à résoudre. Leur principal désavantage est que désormais, toutes les grandeurs physiques sont exprimées comme des fonctions des q_i. Par exemple, le vecteur position d'une particule, nommée α, est désormais $\vec{r}_\alpha\big(\{q_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\big)$, noté dans la suite $\vec{r}_\alpha(q)$ afin d'alléger les notations.

■ Exemple 1 : Masse sur une roue en rotation

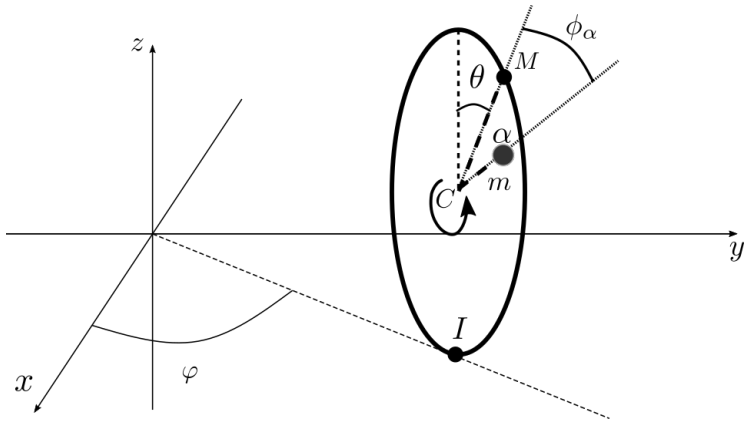


FIGURE 2 – Une roue roulant sur le sol est repérée par l'angle φ que fait la direction de son mouvement avec l'axe x. Le point de contact entre la roue et le sol est noté I. La roue roule sans glisser. Une masse m, au point α est placée sur la roue. Son mouvement est décrit à la fois à l'aide de l'angle $\theta(t)$ que fait une direction de la roue avec la verticale, à partir de laquelle la position de α est repérée par l'angle fixe ϕ_α.

Dans ce dispositif, le système a quatre degrés de liberté. Nous choisissons comme coordonnées généralisées les coordonnées de la projection du centre de la roue sur le plan (xOy), X_C et Y_C, ainsi que les angles φ et θ. Le rayon de la roue est noté R, la distance de α à C ρ_α, et nous rappelons que ϕ_α est fixe. Dans ces conditions, la position de α peut s'écrire :

$$\begin{cases} x_\alpha\big(X_C, Y_C, \varphi, \theta\big) = X_C + \rho_\alpha \cos(\varphi)\sin(\theta+\phi_\alpha) \\ y_\alpha\big(X_C, Y_C, \varphi, \theta\big) = Y_C + \rho_\alpha \sin(\varphi)\sin(\theta+\phi_\alpha) \\ z_\alpha\big(X_C, Y_C, \varphi, \theta\big) = R + \rho_\alpha \cos(\theta+\phi_\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

■ Exemple 2 : Perle sur un cerceau en rotation

Dans ce problème, la vitesse angulaire de rotation du cerceau $\mathring{\phi}$ est fixée par l'expérimentateur ; ϕ n'est donc pas une coordonnée généralisée. Le mobile a donc un unique degré de liberté, qui peut être décrit par l'angle θ. Nous avons donc, dans la base cartésienne dans laquelle sont

écrites les équations de Newton, en notant R le rayon du cerceau :

$$\begin{cases} x_M(\theta) = R\cos\big(\phi(t)\big)\sin(\theta) \\ y_M(\theta) = R\sin\big(\phi(t)\big)\sin(\theta) \\ z_M(\theta) = R\cos(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

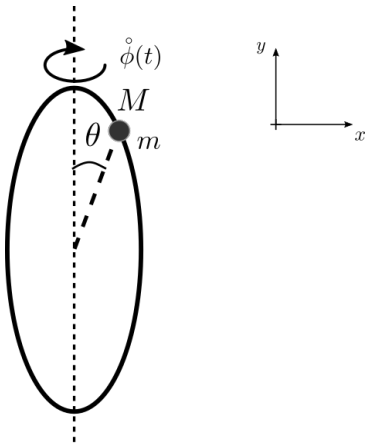


FIGURE 3 – La masse m, située au point M, glisse sans frottement le long du cerceau. Celui-ci est maintenu en rotation avec une vitesse angulaire $\mathring{\phi}(t)$.

II] Dynamique

1) Quantité d'accélération généralisée

Dans la suite de cette section, nous noterons avec un indice α la particule considérée. Dans le formalisme de coordonnées généralisées présenté ci-dessus, le principe fondamental de la dynamique pour une particule d'accélération $\vec{a}_\alpha$ s'écrit :

$$m_\alpha\,\vec{a}_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big) = \vec{f}_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big)\,. \tag{3}$$

Le vecteur vitesse correspondant a pour expression :

$$\vec{v}_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big) = \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\,\mathring{q}_i\,. \tag{4}$$

Comme évoqué plus tôt, simplifier les équations du mouvement va probablement nous rapprocher des équations obtenues par application du théorème de l'énergie cinétique, retenons donc que (i) la composante utile pour la dynamique est celle qui est dans la direction du mouvement à chaque instant, et (ii) l'énergie cinétique joue sûrement un rôle central.

Dans ce qui suit, nous commençons par esquisser un début de solution, sans rigueur, mais pour comprendre qualitativement comment chaque élément peut trouver sa place ; puis, dans un second temps, nous démontrerons le résultat rigoureusement.

L'énergie cinétique d'une particule peut s'écrire :

$$T_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big) = \frac{1}{2}m_\alpha\,v_\alpha^2\big(q,\mathring{q},t\big)\,, \tag{5}$$

soit

$$\frac{\partial T}{\partial v_\alpha^i} = m_\alpha\, v_\alpha^i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_\alpha^i}\right) = m_\alpha\, a_\alpha^i\,. \tag{6}$$

D'autre part, supposons que notre système soit conservatif, d'énergie $E = T\big(q, \mathring{q}, t\big) + U(q)$, alors

$$f_\alpha^i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}\,. \tag{7}$$

Ces relations nous permettent de comprendre les transformations de T qui vont apparaître dans la reformulation des équations de Newton, avec une subtilité : dans la première série de calcul, la variable sur laquelle la dérivée partielle est prise est $\mathring{q}_i$, en accord avec le choix de coordonnées généralisées, et non pas v_α^i. Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T\big(q, \mathring{q}, t\big)}{\partial \mathring{q}_i} &= \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{v}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \mathring{q}_i} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{v}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\,,\end{aligned} \tag{8}$$

où la seconde ligne a été déduite par application d'Eq. (4). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_i}\right) &= \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{a}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{v}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \\ &= \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{a}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{v}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_i} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{a}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}\big(q, \mathring{q}, t\big)\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Finalement, en définissant la *quantité d'accélération généralisée* :

$$\boxed{A_i\big(q, \mathring{q}, t\big) = \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{a}_\alpha\big(q, \mathring{q}, t\big) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}}\,. \tag{10}$$

Tout comme la quantité de mouvement est homogène à une masse fois une vitesse, la quantité d'accélération généralisée est homogène à une masse fois une accélération dans le cas où q_i est une longueur (attention, si q_i est un angle, A_i est un couple). En fonction de l'énergie cinétique T, les équations du mouvement (une par coordonnée généralisée q_i) deviennent :

$$\boxed{A_i\big(q, \mathring{q}, t\big) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}}\,. \tag{11}$$

■ Exemple 1 : Perle sur un cerceau en rotation

Dans ce cas, la coordonnée généralisée est $q = \theta$.

$$T\big(\theta, \mathring{\theta}, t\big) = \frac{m}{2}\, R^2 \left(\mathring{\theta}^2 + \mathring{\phi}^2(t) \sin^2(\theta)\right). \tag{12}$$

À partir d'ici,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{m}{2}\, R^2\, \mathring{\phi}^2(t) \times 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial \mathring{\theta}} &= 2 \times \frac{m}{2}\, R^2\, \mathring{\theta}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \; A\big(\theta, \mathring{\theta}, t\big) = m\, R^2 \left(\mathring{\mathring{\theta}} - \mathring{\phi}^2(t) \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) \tag{13}$$

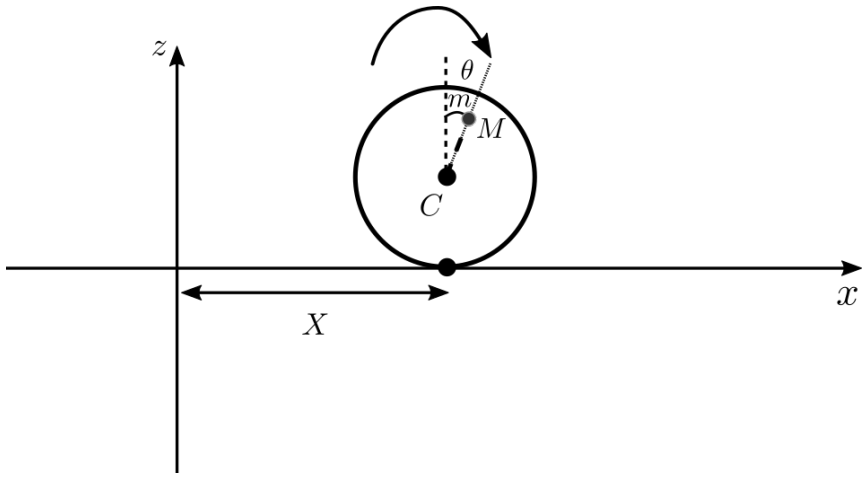


FIGURE 4 – La roue avec surcharge a un mouvement restreint à une dimension.

■ Exemple 2 : Roue avec surcharge

Dans ce problème, contrairement à l'exemple précédent, le mouvement de la roue est à une dimension et peut être décrit par une unique coordonnée X. Si nous considérons à présent la masse m, placée à une distance r du centre C de la roue (de rayon R), nous avons besoin d'une second coordonnée, en l'occurrence, l'angle θ que le rayon passant par M fait avec la verticale. Nous avons donc :

$$q_1 = X \ , \ q_2 = \theta \, . \tag{14}$$

À partir d'ici, nous pouvons exprimer les vecteurs position et vitesse en fonction de X et θ :

$$\begin{cases} x_M = X + r\,\sin(\theta) \\ z_M = R - r\,\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \mathring{X} + r\,\mathring{\theta}\,\cos(\theta) \\ v_z = r\,\mathring{\theta}\,\sin(\theta) \end{cases} \tag{15}$$

Ces équations permettent d'écrire l'énergie cinétique du système, qui comprend à la fois une partie due à la vitesse de la masse mobile, et une partie tenant compte du moment d'inertie I_y de la roue, et de sa masse propre M.

$$\begin{aligned} T\big(X,\theta,\mathring{X},\mathring{\theta}\big) &= \frac{1}{2}M\,\mathring{X}^2 + \frac{1}{2}m\big(\mathring{X} + r\,\mathring{\theta}\,\cos(\theta)\big)^2 + \frac{1}{2}m\,r^2\,\mathring{\theta}^2\sin^2(\theta) + \frac{1}{2}\,I_y\,\mathring{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m+M)\,\mathring{X}^2 + \frac{1}{2}\,I_y\,\mathring{\theta}^2 + m\,\mathring{X}r\,\mathring{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2}m\,r^2\,\mathring{\theta}^2\,, \end{aligned} \tag{16}$$

ce qui nous permet de déduire les deux composantes (deux coordonnées généralisées) de la quantité d'accélération généralisée.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mathring{X}} &= (M+m)\,\mathring{X} + m\,r\,\mathring{\theta}\,\cos(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial X} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ A_X = (M+m)\mathring{\mathring{X}} + m\,r\,\mathring{\mathring{\theta}}\,\cos(\theta) - m\,r\,\mathring{\theta}^2\,\sin(\theta)\,. \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mathring{\theta}} &= I_y\,\mathring{\theta} + m\,r\,\mathring{\theta} + m\,\mathring{X}\,r\,\cos(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m\,\mathring{X}\,r\,\mathring{\theta}\,\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ A_\theta = I_y\mathring{\mathring{\theta}} + m\,r^2\,\mathring{\mathring{\theta}} + m\,r\,\mathring{\mathring{X}}\,\cos(\theta)\,. \tag{18}$$

Remarquons qu'en termes des quantités habituelles en mécanique, A_X donne la résultante des forces sur l'objet, alors que A_θ donne le moment par rapport au centre de la roue. La différence entre force et moment se retrouve encodée dans les symétries des objets manipulés, il n'y a donc plus lieu de traiter les deux problèmes séparément.

Pour finir, remarquons qu'il est possible de décrire la dynamique du mouvement en termes de quantité d'accélération généralisée grâce au principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{A_i\big(q, \mathring{q}, t\big) = \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}}\,. \tag{19}$$

2) Principe des travaux virtuels

<u>Définition :</u> Un *déplacement virtuel* est une variation $\delta\vec{r}_\alpha$ qui :

- $\delta\vec{r}_\alpha$ est une variation des $\big\{q_i\big\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ sans variation du temps.
- $\delta\vec{r}_\alpha$ respecte les contraintes imposées sur le mouvement. Par exemple, pour le pendule simple, il ne peut s'agir que d'un déplacement élémentaire le long du cercle sur lequel la masse se déplace, et non pas d'une variation indépendante des deux coordonnées cartésiennes correspondantes.

La seconde condition impose que le déplacement virtuel soit de la même nature que le déplacement réel du système. La première permet de décorréler les variations spatiales et la dynamique. Ainsi, lors d'un déplacement virtuel, le système se déplace le long d'une trajectoire possible, sans obéir aux contraintes temporelles imposées par la dynamique.

Le principe fondamental de la dynamique pour une particule s'écrit :

$$\vec{f}_\alpha = \mathring{p}_\alpha \;\Rightarrow\; \big(\vec{f}_\alpha - \mathring{\vec{p}}_\alpha\big)\cdot\delta\vec{r}_\alpha = 0\,. \tag{20}$$

Nous pouvons alors découper $\vec{f}_\alpha = \vec{f}_\alpha^{(c)} + \vec{f}_\alpha^{(a)}$, où $\vec{f}_\alpha^{(c)}$ sont les forces de contrainte, et $\vec{f}_\alpha^{(a)}$ sont les forces appliquées.

Le plus souvent, les forces de contrainte ne travaillent pas (c'est le cas des forces de réaction, de tension de fil par exemple), leur produit scalaire avec le déplacement virtuel $\delta\vec{r}_\alpha$ est donc nul. En prenant en compte toutes les particules du système, dans ce cas, la dynamique peut être exprimée sous la forme suivante, connue sous le nom de *principe de D'Alembert* :

$$\boxed{\sum_\alpha \big(\vec{f}_\alpha^{(a)} - \mathring{\vec{p}}_\alpha\big)\cdot\delta\vec{r}_\alpha}\,. \tag{21}$$

Cette équation donne la dynamique du système, mais **sans faire intervenir les forces de contraintes**.

3) Équations du mouvement

Le principe de D'Alembert est écrit sous une forme qui rend difficile son utilisation comme équation du mouvement. Afin de le simplifier, il faudrait pouvoir éliminer le déplacement virtuel ; c'est ici que les coordonnées généralisées entrent en compte. En effet, les $\delta\vec{r}_\alpha$ ne sont pas indépendants les uns des autres (ils ne forment, a priori, pas une famille libre de vecteurs). En revanche, il est possible de les exprimer en fonction des δq_i correspondants :

$$\sum_\alpha \vec{f}_\alpha^{(a)}\cdot\delta\vec{r}_\alpha = \sum_\alpha\sum_{i=1}^n \vec{f}_\alpha^{(a)}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i\,\delta q_i\,. \tag{22}$$

La formule précédente définit la *force généralisée* Q_i associée à une coordonnée q_i donnée :

$$\boxed{Q_i = \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}}\,, \tag{23}$$

où nous avons enlevé l'exposant (a) de la force, car la force généralisée sert entre autres choses à gérer les cas où toutes les forces de contraintes ne sont pas simples à éliminer (voir TD n°1).

En reprenant l'expression Eq. (19) de la quantité d'accélération généralisée, l'équation (22) peut être réécrite :

$$\sum_{i=1}^{n} \big(A_i(q,\mathring{q},t) - Q_i(q)\big)\delta q_i = 0\,. \tag{24}$$

Si nous supposons de plus que le choix de coordonnées généralisées nous a permis de faire de $\{q_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre, alors, nous obtenons les équations du mouvement suivantes :

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!],\ A_i(q,\mathring{q},t) - Q_i(q) = 0}\,. \tag{25}$$

4) Cas conservatif

Dans le cas où les forces dérivent d'un potentiel scalaire $\phi(q)$, l'expression des forces généralisées se simplifie :

$$\vec{f}_\alpha = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi_\alpha) \ \Rightarrow\ Q_i = -\sum_\alpha \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi_\alpha)\cdot\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}\,, \tag{26}$$

où $U(q)$ est le potentiel à N particules. Ce formalisme se généralise bien au cas où U dépend aussi de $\mathring{q}$ (voir TD n°1).

En reprenant l'expression de la quantité d'accélération généralisée Eq. (19), l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0\,. \tag{27}$$

Dans le cas où U ne dépend que de q, cette équation se réécrit donc :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}\,, \tag{28}$$

où $L\big(q,\mathring{q},t\big) = T(\mathring{q}) - U(q)$ est la *fonction de Lagrange* du système. L'équation Eq. (28) s'appelle *équation de Lagrange* et correspond à l'écriture des équations du mouvement.

L'équation de Lagrange est équivalente au principe fondamental de la dynamique. Comme nous allons le voir dans la suite, cette équation peut en réalité s'écrire dans un cadre plus général, et ne se limite pas au cas de forces conservatives. Cet exemple permet simplement d'établir le lien entre les équations de Lagrange et celles de Newton.

Il est important de bien comprendre que la fonction de Lagrange n'est égale à la différence entre les énergies cinétique et potentielle **que** dans le cas où les q sont évalués **sur la trajectoire du système**. Son expression générale est beaucoup plus vaste.

Remarquons que la fonction de Lagrange **n'est pas unique**. En effet, soit la transformation

$$L\big(q,\mathring{q},t\big) \mapsto L\big(q,\mathring{q},t\big) + \frac{\partial \chi}{\partial t}\,, \tag{29}$$

où $\chi(q,t)$ est une fonction arbitraire. Le membre de gauche de l'équation du mouvement a donc une contribution complémentaire de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial\mathring{q}_j}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\chi}{\partial q_j}\right). \tag{30}$$

La fonction χ admet une différentielle :

$$d\chi=\frac{\partial\chi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\chi}{\partial q_i}\mathring{q}_i\,, \tag{31}$$

et, de même,

$$d\mathring{\chi}=\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial q_i}\mathring{q}_i\right]dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial q_i}+\frac{\partial^2\chi}{\partial q_i^2}\mathring{q}_i\right]dq_i+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\chi}{\partial q_i}\right]d\mathring{q}_i\,, \tag{32}$$

soit

$$\frac{\partial\mathring{\chi}}{\partial\mathring{q}_i}=\frac{\partial\chi}{\partial q_i}\,, \tag{33}$$

et finalement, le terme dans Eq. (30) est nul. Autrement dit, ajouter à la fonction de Lagrange une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des coordonnées généralisées laisse invariantes les équations du mouvement.

III] Conclusions

La mécanique analytique de Lagrange est une reformulation de la mécanique de Newton, elle ne contient pas plus, ou moins d'information sur le système. Elle vise à répondre à trois problèmes principaux : (i) exprimer le problème, autant que faire se peut, en fonction de variables indépendantes les unes des autres (formant une famille libre), (ii) faire apparaître les structures communes et les symétries de façon plus claire, (iii) se débarrasser des équations de contrainte.

Le prix à payer pour y arriver est que (i) le formalisme est moins systématique, et remplace les équations différentielles par des équations aux dérivées partielles, (ii) l'homogénéité des coordonnées, et des quantités construites à partir de celles-ci peut varier, et (iii) tout est concentré sur l'évolution du mouvement dans la direction de la trajectoire (en réalité, il est possible de calculer la valeur des forces de contrainte ou d'inertie orthogonales au mouvement grâce au principe des travaux virtuels, comme nous le verrons en TD).

Cours n°2 : Symétries et lois de conservation

Dans le cours précédent, l'intérêt de la mécanique lagrangienne a été présentée avant tout comme un problème de réduction du nombre d'équations du mouvement couplées grâce à l'introduction de coordonnées généralisées. Mais en réalité, la formulation lagrangienne de la mécanique permet également de trouver plus aisément des intégrales premières du mouvement (c'est à dire des quantités conservées au cours du temps). Ainsi, pour chaque intégrale première $\mathcal{I}$, une des équations du mouvement peut être remplacée par l'équation, généralement beaucoup plus simple,

$$\boxed{\frac{d\mathcal{I}(q,\mathring{q})}{dt}=0}. \tag{34}$$

I] Théorie

Nous avons ici fait le choix de présenter d'abord le problème sous son aspect le plus général, avant de traiter les cas particuliers.

1) Cas général : le théorème de Noether

Soit une transformation $q \mapsto q(s)$, avec $q(0) = q$. Si au voisinage de $s = 0$, $L\big(q(s), \mathring{q}(s), t\big) \simeq L\big(q, \mathring{q}, t\big)$, alors

$$\frac{d\mathcal{I}(q, \mathring{q})}{dt} = 0\,, \tag{35}$$

avec

$$\boxed{\mathcal{I}\big(q, \mathring{q}, t\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}}\,. \tag{36}$$

Cette identité se démontre comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{I}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\right] \cdot \frac{\partial q(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial q(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right] \\
&= \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{dq}{dt}\right]\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} \cdot \frac{\partial \mathring{q}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\big[L\big(q(s), \mathring{q}(s), t\big)\big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

où l'identité bleue a été obtenue par application des équations de Lagrange, l'identité verte découle du théorème de Schwarz, et la dernière égalité est la version formelle de l'identité utilisée comme hypothèse.

Une quantité récurrente, qui jouera un rôle important dans la suite est l'*impulsion généralisée* p_i associée à la coordonnée q_i, définie par :

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}}\,. \tag{37}$$

Maintenant que les bases ont été posées, examinons les conséquences de ce théorème sur des cas concrets.

2) Coordonnée cyclique

Une coordonnée q_i est dite *cyclique* si elle n'apparaît pas explicitement dans le lagrangien. Par conséquent,

$$q_i \textbf{ cyclique} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,. \tag{38}$$

Une application directe de l'équation de Lagrange donne alors :

$$\boxed{\frac{dp_i}{dt} = 0}\,. \tag{39}$$

Autrement dit **si q_i est une coordonnée cyclique, l'impulsion associée p_i est conservée**.

■ Exemple 1 : Particule libre.

Dans ce cas, l'expression de la fonction de Lagrange est particulièrement triviale.

$$L\big(q, \mathring{q}, t\big) = T\big(\mathring{q}\big) = \frac{1}{2} m\, \mathring{q}^2\,. \tag{40}$$

La coordonnée q est cyclique. Par conséquent, l'impulsion $p = \dfrac{\partial L}{\partial \mathring{q}} = m\mathring{q}$ est conservée. Nous retrouvons le résultat bien connu correspondant au principe d'inertie : la quantité de mouvement d'une particule libre ne change pas au cours du temps.

■ Exemple 2 : Potentiel de force centrale.

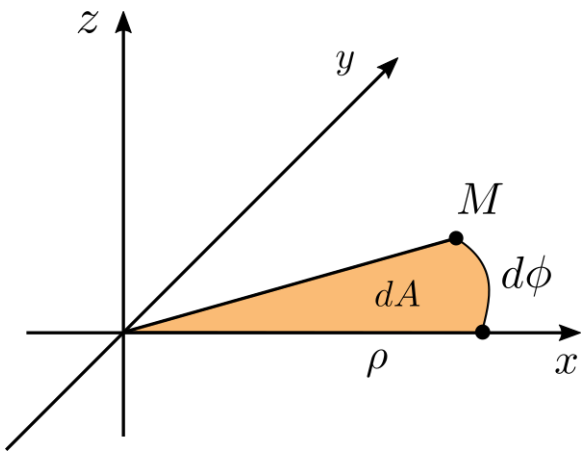


FIGURE 5 – Mouvement élémentaire d'une particule dans un champ de force central. L'axe x est choisi comme l'axe sur lequel se trouve la particule à $t = 0$. Pendant un intervalle de temps infinitésimal dt, la particule se déplace en suivant un secteur d'angle $d\phi$ correspondant à une aire élémentaire balayée dA.

Considérons le mouvement d'une particule dans un champ de force dérivant d'un potentiel $U(\rho)$ indépendant de la direction dans laquelle pointe le vecteur position. La définition de la force associée, $\vec{f} = -\dfrac{dU}{d\rho} \cdot \vec{u}_\rho$, piège la trajectoire de la particule dans un plan, choisi ici comme étant le plan (xOy) (voir fig. 5 pour une description complète de la géométrie du problème).

Nous pouvons décrire ce mouvement plan à l'aide de deux coordonnées généralisées, que nous choisissons être ρ et ϕ. Il n'est alors pas difficile d'établir que la fonction de Lagrange associée s'écrit :

$$L\big(\rho, \mathring{\rho}, \phi, \mathring{\phi}, t\big) = \frac{1}{2} m\, \mathring{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\, \rho^2\, \mathring{\phi}^2 - U(\rho)\,. \tag{41}$$

La coordonnée ϕ est cyclique, l'impulsion p_ϕ associée est donc conservée.

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \mathring{\phi}} = m\, \rho^2\, \mathring{\phi}\,, \tag{42}$$

que nous pouvons identifier avec la projection du moment cinétique $\vec{J}$ de la particule le long de l'axe orthogonal à la trajectoire.

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\,\rho^2\,\mathring{\phi} \cdot \vec{u}_z\,. \tag{43}$$

Remarquons que l'aire balayée pendant dt est :

$$dA = \rho \times \frac{\rho\,d\phi}{2}\,, \tag{44}$$

de sorte que

$$J_z = \text{constante} \;\Rightarrow\; \frac{d^2A}{dt^2} = 0\,. \tag{45}$$

Ce résultat est connu sous le nom de « loi des aires », ou « seconde loi de Kepler ».

3) Translation continue du temps

Supposons que la fonction de Lagrange soit invariante par translation continue dans le temps, soit :

$$\forall t_0\,,\;\; L\big(q,\mathring{q},t\big) = L\big(q,\mathring{q},t+t_0\big) \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,. \tag{46}$$

Dans ce cas, nous pouvons simplifier l'expression de la dérivée totale de L par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{dL}{dt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\mathring{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\,\mathring{\mathring{q}}_i \\
&= \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\mathring{q}_i\right] \\
&= -\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathring{q}_i\,\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} - L\right] \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

où l'égalité bleue a été obtenue en appliquant l'équation de Lagrange.

La quantité

$$\boxed{E\big(q,\mathring{q},t\big) = \mathring{q} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} - L\big(q,\mathring{q},t\big)}\,, \tag{47}$$

qui **lorsqu'elle est évaluée le long de la trajectoire du système** (et dans ce cas là seulement), correspond à l'énergie du système, est conservée lors du mouvement.

■ Exemple 1 : Particule libre.

Nous avons déjà établi l'expression de la fonction de Lagrange.

$$L = \frac{1}{2} m\,\mathring{q}^2\,. \tag{48}$$

Ce système est évidemment conservatif. Son énergie peut s'exprimer d'après Eq. (47) par :

$$E = \mathring{q} \times m\,\mathring{q} - \frac{1}{2} m\,\mathring{q}^2 = \frac{1}{2} m\,\mathring{q}^2 = T \tag{49}$$

L'énergie (cinétique) du système est conservée.

■ Exemple 2 : Particule dans un champ de force central.

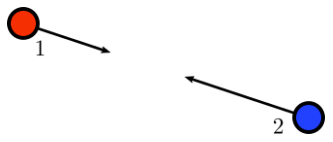


FIGURE 6 – Interaction entre deux particules conforme à la troisième loi de Newton. Ce problème est équivalent à celui du mouvement d'une particule dans un potentiel de force centrale (particule virtuelle dans le référentiel du centre de masse, voir fascicule de rappels en mécanique).

La fonction de Lagrange peut être déduite de l'expression de l'énergie cinétique en coordonnées sphériques, et du potentiel $U(r)$.

$$L\big(r,\mathring{r},\theta,\mathring{\theta},t\big) = \frac{1}{2}m\,\mathring{r}^2 + \frac{1}{2}m\,r^2\,\mathring{\theta}^2 - U(r)\,. \tag{50}$$

L'application de la formule Eq. (47) donne alors :

$$\begin{aligned} E &= \mathring{r}\times m\,\mathring{r} + \mathring{\theta}\times m\,r^2\,\mathring{\theta} - \frac{1}{2}m\,\mathring{r}^2 - \frac{1}{2}m\,r^2\,\mathring{\theta}^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\Big[\mathring{r}^2 + r^2\,\mathring{\theta}^2\Big] + U(r)\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Reprenons le cas d'un système invariant par translation continue sur l'axe des temps, et plaçons nous dans le cas conservatif. Nous pouvons alors écrire :

$$L\big(q,\mathring{q},t\big) = T\big(q,\mathring{q},t\big) - U(q)\,, \tag{52}$$

soit

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n}\mathring{q}_i^2\,\frac{\partial L}{\partial\mathring{q}_i} - L\big(q,\mathring{q},t\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathring{q}_i^2\,\frac{\partial T}{\partial\mathring{q}_i} - T + U(q)\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Pour que la décomposition énergie cinétique – énergie potentielle ait un sens, il faut pouvoir identifier T comme une énergie cinétique, ce que nous faisons en imposant la relation suivante :

$$T\big(q,\alpha\,\mathring{q},t\big) = \alpha^2\,T\big(q,\mathring{q},t\big)\,. \tag{54}$$

Il en découle que :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=1} = 2\,\alpha\,T\big(q,\mathring{q},t\big)\Big|_{\alpha=1}\,, \tag{55}$$

soit

$$\mathring{q}\cdot\frac{\partial T}{\partial\mathring{q}} = 2\,T\,. \tag{56}$$

Finalement,

$$E = 2\,T - T + U(q) = T + U\,, \tag{57}$$

qui est la relation bien connue.

Dans le cas plus général où la force généralisée dépend de $\mathring{q}$, il est possible de travailler avec :

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \mathring{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{58}$$

(voir TD n°1). L'expression de la fonction énergie devient alors :

$$E = T + U - \mathring{q} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathring{q}} \,. \tag{59}$$

Le nouveau terme correspond typiquement à un terme de pertes, si sa présence découle de forces de type frottements visqueux, de pertes ou de gains d'énergie lors de l'interaction avec l'environnement s'il s'agit de forces d'inerties, le dernier cas le plus fréquent étant la force de Lorentz dont partie magnétique ne travaille pas.

4) Translations continues dans l'espace

- Cas n°1 : $q_i \mapsto q_i + a$

  Ce cas a été traité précédemment, il correspond à q_i variable cyclique. Dans ce cas, d'après l'équation de Lagrange, l'impulsion associée est conservée.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\Rightarrow\; \mathring{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right) = 0 \tag{60}$$

  Plus précisément, dans le cas de translations d'espace, q_i est une **longueur**, et p_i une **quantité de mouvement**.

- Cas n°2 : $\vec{q} \mapsto \vec{q} + \vec{a}$

  Les équations de Lagrange peuvent être appliquées de la même façon, menant à :

$$\boxed{\mathring{P} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\right] = 0} \,. \tag{61}$$

  Autrement dit, lors d'invariance par translation **globale**, c'est la quantité de mouvement du **centre de masse** qui est conservée.

■ Exemple : Système masses-ressort.

FIGURE 7 – Système de deux masses reliées par un ressort.

Considérons un système constitué par deux masses reliées par un ressort. Le système est conservatif, la fonction de Lagrange s'écrit :

$$L\big(q_1, \mathring{q}_1, q_2, \mathring{2}, t\big) = \frac{1}{2} m_1 \mathring{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathring{q}_2^2 - U_H\big(\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|\big) \,, \tag{62}$$

où U_H est le potentiel de Hooke, que nous n'avons pas besoin d'expliciter ici.

Le système est invariant par translation globale (mais pas par translation relative de 1 par rapport à 2). L'intégrale première du mouvement associée est donc :

$$\vec{P} = m_1 \vec{q}_1 + m_2 \vec{q}_2 \,. \tag{63}$$

5) Rotation continue dans l'espace

- Cas n°1 : $q_i \mapsto q_i + \phi$

  Ce cas correspond à q_i variable cyclique. Dans ce cas, d'après l'équation de Lagrange, l'impulsion associée est conservée.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\Rightarrow\; \mathring{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right) = 0 \tag{64}$$

  Plus précisément, dans le cas de rotations d'espace, q_i est un **angle**. La dimension de p_i est donc donnée par :

$$\left[p_i\right] = \frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}}{1\cdot\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{65}$$

  L'impulsion p_i est donc homogène à un **moment cinétique**. Plus précisément, il s'agit de **la composante du moment cinétique de la particule dans la direction de l'axe de la rotation considérée**.

- Cas n°2 : $\forall i \in [\![1;n]\!],\; q_i \mapsto q_i + \phi_i$

  Les équations de Lagrange peuvent être appliquées de la même façon, menant à :

$$\boxed{\mathring{J}_j = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_k}\right] = 0}\,. \tag{66}$$

  Autrement dit, lors d'invariance par rotation **globale**, c'est la **composante du moment cinétique total du système dans la direction de la rotation considérée** qui est conservée.

■ Exemple : Système de deux particules interagissant via un potentiel de force central.

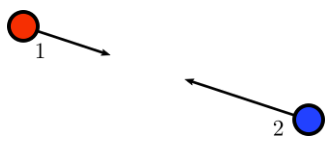


FIGURE 8 – Interaction entre deux particules via un champ de force central.

Le système est conservatif, la fonction de Lagrange associée est :

$$\begin{aligned} L\left(r_1,\mathring{r}_1,\theta_1,\mathring{\theta}_1,r_2,\mathring{r}_2,\theta_2,\mathring{\theta}_2,t\right) &= \frac{1}{2}m_1\left(\mathring{r}_1^2 + r_1^2\,\mathring{\theta}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\mathring{r}_2^2 + r_2^2\,\mathring{\theta}_2^2\right) - U\left(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\mathring{r}_1^2 + r_1^2\,\mathring{\theta}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\mathring{r}_2^2 + r_2^2\,\mathring{\theta}_2^2\right) - U\left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) \end{aligned} \tag{67}$$

À cause du terme d'énergie potentielle, la fonction de Lagrange (et donc le mouvement) n'est pas invariante sous l'action de rotations individuelles de θ_1 ou θ_2. En revanche, elle est invariante sous une transformation globale de ces variables : la composante du moment angulaire le long de l'axe z des coordonnées cylindriques

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}_1} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}_2} \tag{68}$$

est conservée. Nous pouvons en déduire l'équation suivante :

$$m_1 r_1^2 \mathring{\theta}_1 + m_2 r_2^2 \mathring{\theta}_2 = \text{constante}(t)\,. \tag{69}$$

(R) Il est important de bien comprendre qu'a priori, p_i et q_i ne sont par forcément des grandeurs **mesurables**, mais seulement des intermédiaires de calcul plus ou moins pratiques. Les quantités physiques correspondant à la quantité de mouvement $\vec{\pi}_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big) = m_\alpha \mathring{\vec{r}}\big(q,t\big)$, ou le moment cinétique $\vec{\sigma}_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big) = \vec{r}_\alpha\big(q,t\big) \wedge \vec{\pi}_\alpha\big(q,\mathring{q},t\big)$ d'une particule (ou un ensemble de particules) donnée sont a priori des fonctions de toutes les coordonnées généralisées et leur dérivées, comme le sont ses vecteurs position ou vitesse.

II] Applications

1) Mouvement à force centrale

Nous ne redérivons pas ici le passage du problème à deux corps au problème à un corps (voir fascicule de rappels de mécanique). Considérons un mobile soumis à un champ de forces dont la **direction** est donnée par la **ligne reliant le mobile au centre de force**, et le **module** est **indépendant de la direction**.

$$\vec{f} = f(r)\cdot\vec{e}_r \;\Leftrightarrow\; \vec{f}(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}(U(r))\,. \tag{70}$$

Comme évoqué précédemment, la condition initiale définit un plan $\text{Vect}\big\{\vec{v}_0;\vec{f}(t=0)\big\}$ dans lequel le mouvement est piégé. Nous utilisons donc deux coordonnées généralisées pour décrire le mouvement : les coordonnées polaires r et θ.

Il n'est pas difficile d'établir que dans ces conditions :

$$L\big(r,\mathring{r},\theta,\mathring{\theta},t\big) = \frac{1}{2}m\,\mathring{r}^2 + \frac{1}{2}m\,r^2\,\mathring{\theta}^2 - U(r)\,. \tag{71}$$

Utilisons a présent les symétries du problème :

- ★ θ est une variable cyclique.

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}} = m\,r^2\,\mathring{\theta} = \text{constante} \tag{72}$$

  Rappelons que p_θ est la projection du moment cinétique du système le long de l'axe orthogonal au plan du mouvement.

- ★ $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$, le système est donc **conservatif**.

$$E = \mathring{\theta}\,p_\theta + \mathring{r}\,p_r + U(r) = \frac{1}{2}m\,\mathring{r}^2 + \frac{1}{2}m\,r^2\mathring{\theta}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\,\mathring{r}^2 + U_{eff}(r) = U_+ + U_{eff}(r)\,. \tag{73}$$

  Ainsi, l'énergie se décompose en un terme toujours positif, et un potentiel d'interaction effective.

Enfin, citons le résultat suivant, que nous donnons sans démonstration :

• Théorème de Bertrand : Pour un potentiel en loi de puissance $U(r) \propto r^n$, les trajectoires ne sont fermées pour toute condition initiale que si $n = -1$ (potentiel newtonien), ou $n = 2$ (potentiel de Hooke).

• Problème de Kepler : $U(r) = -\dfrac{K}{r}$, $K \geqslant 0$.

■ Exemples :

(i) Potentiel de gravitation : $U_G(r) = -\dfrac{G\,m\,M}{r}$.

(ii) Potentiel de Coulomb : $U(r) = \dfrac{q_1\,q_2}{4\pi\varepsilon_0\,r}$. Dans la suite, nous nous restreignons au cas attractif, $\mathrm{sgn}(q_1\,q_2) = -1$.

Il est intéressant de noter que toutes les forces fondamentales de la mécanique classique ont la forme de forces newtoniennes.

Nous pouvons ré-exprimer le potentiel effectif en faisant apparaître la constante p_θ :

$$U_{eff}(r) = \frac{p_\theta^2}{2\,m\,r^2} - \frac{K}{r}\,. \tag{74}$$

Le profil énergétique peut alors être représenté de la façon suivante :

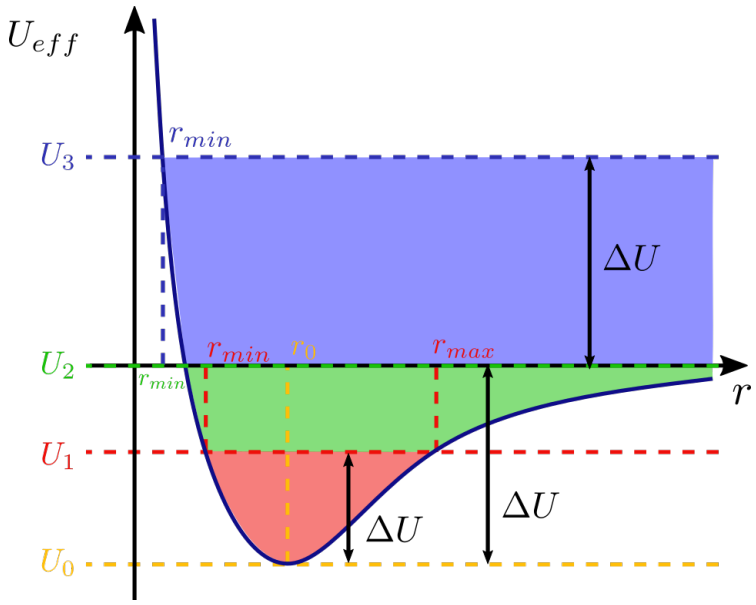


FIGURE 9 – Tracé de l'allure du potentiel effectif, et analyse des différents mouvements possibles en fonction de la valeur de E.

Les mouvements possibles sont les suivants :

★ $\forall r,\ E < U_{eff}(r)$. Cette équation est incompatible avec $U_+ \geqslant 0$. Aucun mouvement n'est possible.

- ★ $E = U_{eff}(r_0)$. Une seule valeur r_0 de r est possible. Le mouvement est donc circulaire.
- ★ $U_{eff}(r_{min}) = E = U_{eff}(r_{max})$. Dans ce cas, le système est dans un *état lié*, il ne peut se trouver plus loin que r_{max} du centre de force. La trajectoire a deux points tournants, où $\mathring{r} = 0$ situés en r_{min} et r_{max}. Le point r_{min} caractérisant l'approche maximale du centre de force est appelé *périhélie*, le point r_{max} est l'*aphélie*. Notons que $r_{min} > 0$.
- ★ $E = 0$. Cette situation correspond à un cas limite où l'aphélie disparaît. Le système se trouve donc dans un *état libre*. De même que dans les autres cas, il ne peux s'approcher arbitrairement du centre de force.
- ★ $E > 0$. Le système est également dans un état libre. La différence avec le cas précédent n'apparaît pas clairement ici, si ce n'est que U_+ ne peut devenir arbitrairement faible, mais nous verrons lors de l'étude des trajectoires pourquoi il est préférable de le traiter à part.

• Équations horaires :

Les lois horaires se déduisent directement des intégrales premières du mouvement. En effet, ce problème est un problème à variables séparables.

$$\begin{aligned} \mathring{p}_\theta = 0 \;\Rightarrow\; & \frac{d}{dt}\left[m\,r^2\,\mathring{\theta}\right] = 0 \\ \Rightarrow\; & \boxed{\theta(t) = \int_0^t \frac{p_\theta}{m\,r^2(t')}\,dt'} \,. \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \mathring{E} = 0 \;\Rightarrow\; & \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E + \frac{K}{r} - \frac{p_\theta^2}{2\,m\,r^2}\right) \\ \Rightarrow\; & \boxed{t(r) = \int_{r(t=0)}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{K}{r} - \frac{p_\theta^2}{2\,m\,r^2}\right)}}} \,. \end{aligned} \tag{76}$$

• Équation de la trajectoire :

Tout d'abord, utilisons les équations horaires.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right)^2 \\ &= \frac{2}{m}\left(E + \frac{K}{r} - \frac{p_\theta^2}{2\,m\,r^2}\right) \cdot \left(\frac{m\,r^2}{p_\theta}\right)^2 \\ &= \frac{2\,m\,r^4}{p_\theta^2}\left(E + \frac{K}{r} - \frac{p_\theta^2}{2\,m\,r^2}\right) . \end{aligned} \tag{77}$$

Il est ensuite utile d'utiliser le changement de variable suivant, inspiré par la dépendance en r du second membre :

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \,. \tag{78}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{1}{r^2(\theta)}\right)^2 \\ &= \frac{2\,m}{p_\theta^2}\left(E + K\,u - \frac{p_\theta^2}{2\,m}\,u^2\right)\end{aligned} \tag{79}$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2\,m}{p_\theta^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\left[K - \frac{p_\theta^2}{m}u\right], \tag{80}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{p_\theta^2}\,K}. \tag{81}$$

Ce résultat est connu sous le nom de formule de Binet.

- Solution homogène :

$$u^H(\theta) = A\,\cos(\theta - \theta_0)\,. \tag{82}$$

- Solution particulière :

$$u^P = \frac{m\,K}{p_\theta}\,. \tag{83}$$

- Solution générale :

$$u(0) = \frac{1}{r(0)} = A\,\cos(\theta_0 - \theta_0) + \frac{m\,K}{p_\theta^2}\ \Rightarrow\ A = \frac{1}{r(0)} - \frac{m\,K}{p_\theta^2}\,, \tag{84}$$

soit finalement

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)}}, \tag{85}$$

avec $p = \dfrac{p_\theta^2}{m\,K}$, et $e = 1 - \dfrac{p_\theta^2}{m\,K\,r(0)}$.

À quoi ressemble cette courbe ?

- Cas n°1 : $e = 0$

  Dans ce cas l'équation de la trajectoire se réduit à $r = p$. La trajectoire est un cercle centré sur le centre de force, et de rayon $r_0 = p_\theta^2/m\,K$.

- Cas n°2 : $0 < e < 1$

  La trajectoire ne possède pas de point singulier. Nous pouvons sans perte de généralité choisir l'origine de manière à ce que $\theta_0 = 0$. L'aphélie est le point de rayon $1/(1-e)$, et le périhélie $1/(1+e)$.

Afin de mieux analyser la forme de la trajectoire, nous pouvons retourner aux coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned}
&\big(r + e\,r\,\cos(\theta)\big) = p \\
&\Rightarrow\ x^2 + y^2 = p^2 + e^2\,x^2 - 2\,p\,e\,x \\
&\Rightarrow\ \big(x + p\,e\big)^2 - p^2e^2 - e^2x^2 + y^2 = 0 \\
&\Rightarrow\ x^2\big(1 - e^2\big) + 2\,p\,e\,x + y^2 = p^2 \\
&\Rightarrow\ \big(1 - e^2\big)\left(x + \frac{p\,e}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{p^2e^2}{\big(1 - e^2\big)} + y^2 = p^2 \\
&\Rightarrow\ \frac{\big(1 - e^2\big)^2}{p^2}\left(x + \frac{p\,e}{1 - e^2}\right)^2 + y^2\,\frac{\big(1 - e^2\big)}{p^2} = 1\,.
\end{aligned} \tag{86}$$

Nous reconnaissons l'équation d'une ellipse. Le centre de l'ellipse n'est pas confondu avec le centre de force (qui est en réalité un de ses foyers), et est décalé le long de l'axe x. En revanche, l'ellipse est bien symétrique par symétrie axiale d'axe (Ox), puisque le centre se situe en $y = 0$. Bien entendu, à la limite $e \to 0$, l'équation redevient celle d'un cercle de rayon p centré sur l'origine.

- Cas n°3 : $e = 1$

  Dans ce cas, l'équation précédente se réduit drastiquement :

$$y^2 + 2\,p\,x = p^2\,. \tag{87}$$

  C'est l'équation d'une parabole, symétrique par rapport à l'axe (Ox). Le rayon diverge dans les limites $\theta \to \pm\pi$.

- Cas n°4 : $e > 1$

  Dans ce cas, l'équation prend la forme de celle d'un arc d'hyperbole, qui présente des divergences pour $\theta \to \pm\arccos\big(-1/e\big)$. Encore une fois, le centre de force est l'un des foyers de l'hyperbole (celui qui correspond à la branche décrite).

L'ensemble des résultats précédents est résumé sur la figure 10. Le fait que les seuls états liés correspondent à des trajectoires elliptiques constitue la première loi de Kepler.

Dans le début du cours, nous avons montré qu'une conséquence de la conservation de la composante du moment cinétique par rapport à la direction orthogonale au mouvement est la loi de aires, ou seconde loi de Kepler, que nous pouvons écrire ici explicitement dans le cas elliptique en fonction de t :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p_\theta}{2\,m} \ \Leftrightarrow\ A(t) = \frac{p_\theta}{2\,m}t\,, \tag{88}$$

(par définition, $A(0) = 0$).

D'autre part, l'aire de l'ellipse est $A(T) = \pi\,a\,b$, où T est la période du mouvement, a le demi grand axe de l'ellipse, et b le demi petit axe. D'après l'équation de l'ellipse, nous déduisons :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}\ ,\ b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}\,, \tag{89}$$

et nous avons établi que :

$$p_\theta = \sqrt{p\,m\,K}\,. \tag{90}$$

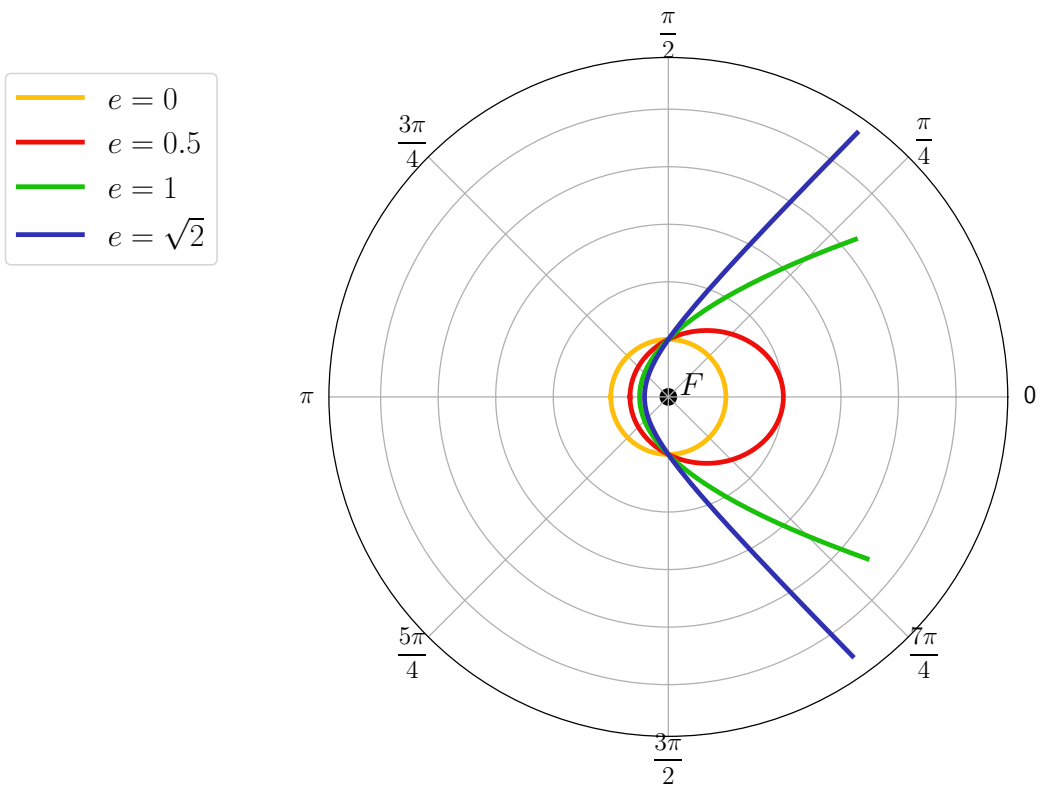


FIGURE 10 – Trajectoires correspondant aux différents cas présentés sur Fig. 9. Les trajectoires sont des coniques dont le centre de force F est l'un des foyers. Les excentricités correspondantes sont données dans la légende.

Finalement,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\,m\,\pi\,a\,b}{p_\theta} \\ &= \frac{2\,m\,\pi\,a \times a \times \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{p\,m\,K}} \\ &= \frac{2\,\pi\,\sqrt{m}\,a^{3/2}}{\sqrt{K}}\,. \end{aligned} \tag{91}$$

Ce résultat est connu sous le nom de troisième loi de Kepler.

En résumé, nous avons montré que pour le problème de Kepler, qui revient à traiter la quasi-intégralité des problèmes à deux corps mettant en jeu les forces fondamentales de la mécanique classique, le formalisme de Lagrange permet de récupérer directement deux intégrales premières du mouvement, ce qui permet d'étudier les lois horaires et la trajectoire de manière relativement directe. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous allons traiter l'autre potentiel singularisé par le théorème de Bertrand : le potentiel harmonique (ou potentiel de Hooke).

2) Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre

Considérons un système conservatif associé à la fonction de Lagrange suivante :

$$L\big(q, \mathring{q}, t\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathring{q}_i^2 - U\big(q\big)\,. \tag{92}$$

Les équations du mouvement pour ce système ont la forme suivante :

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0\,. \tag{93}$$

Nous nous intéressons au cas particulier où $\exists\, q_{eq}$: $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q_{eq}} = 0$. En effet, cette équation conduit à $\ddot{q}_{eq} = 0$, donc q_{eq} reste constant au cours du temps. Une telle coordonnée est appelée *position d'équilibre* du système.

Le plus souvent en réalité, la valeur de q ne peut pas être prescrite arbitrairement proche de q_{eq}. Il est alors important de comprendre comment le système évolue lorsqu'il subit une petite perturbation au voisinage de l'équilibre. Il peut s'agir soit d'une perturbation de la coordonnée elle-même $q_{eq} \mapsto q_{eq} + \varepsilon$, ou d'une perturbation de sa dérivée $\dot{q}_{eq} \mapsto \dot{q}_{eq} + \varepsilon$ (ce sont les deux types de conditions au bord de l'équation du mouvement associée).

- Cas n°1 : système à une dimension

L'évolution du système est entièrement décrite par une unique coordonnée généralisée q. Sans perte de généralité, nous définissons la perturbation de q de la façon suivante : $q(t) = q_{eq} + q_p(t)$. Nous pouvons alors effectuer un développement de Taylor à l'ordre le plus bas du terme de force dans l'équation du mouvement.

$$\begin{aligned} m\,\ddot{q}_p(t) &= -\frac{dU}{dq}\big(q(t)\big) \\ &\underset{t\to 0}{=} -\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_{eq}} - q_p(t)\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_{eq}} + O\big(q_p(t)^2\big) \\ &\underset{t\to 0}{=} -q_p(t)\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_{eq}} + O\big(q_p(t)^2\big) \end{aligned} \tag{94}$$

Posons

$$\boxed{\omega_0^2 = \left|\frac{1}{m}\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_{eq}}\right|} \tag{95}$$

la pulsation propre du système. L'équation du mouvement approchée devient alors :

$$\boxed{\ddot{q}_p(t) \pm \omega_0^2\, q_p(t) = 0}\,. \tag{96}$$

Cette équation présente les deux comportements les plus fréquents autour de l'équilibre suivant le signe du second terme, correspondant à celui de la dérivée seconde de U par rapport à q (voir Fig. 11).
Tout d'abord, si le second terme est positif, l'équation est une équation harmonique. Les solutions sont des combinaisons de cosinus et sinus de pulsation ω_0. Ce cas correspond aux systèmes pour lesquels q_{eq} est un minimum local de l'énergie potentielle.
Si le système est perturbé autour de q_{eq}, celui-ci va osciller autour de la position d'équilibre, et donc ne jamais s'en éloigner sensiblement. L'équilibre est dit *stable*. Le remplacement de petites oscillations au voisinage d'un point d'équilibre stable par des oscillations harmoniques est une approximation très utilisée en physique. Nous en verrons quelques exemples dans ce cours.

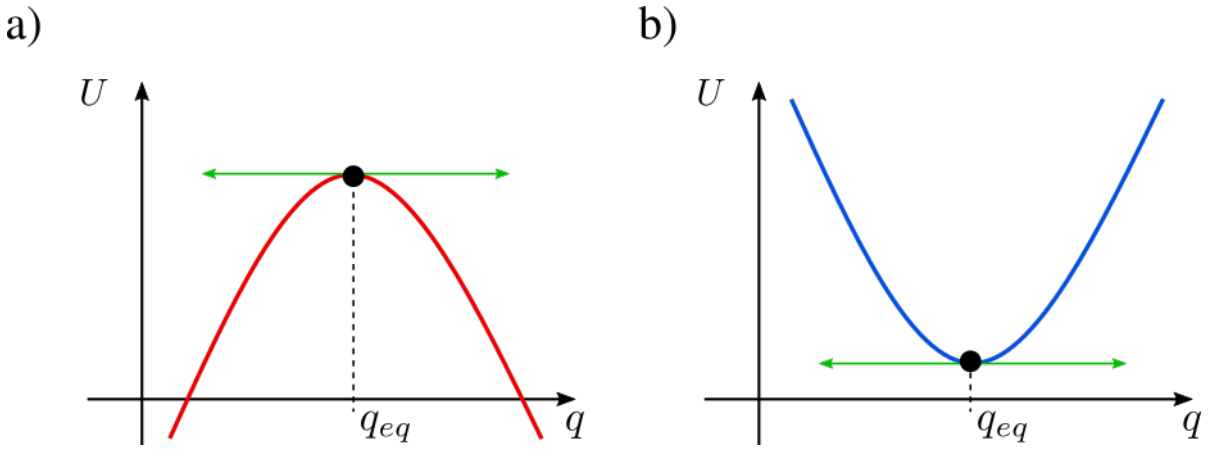


FIGURE 11 – Deux cas les plus fréquents lors de l'estimation d'une fonction au voisinage d'un point de dérivée nulle. a) Le point est un maximum local de la fonction. b) Le point est un minimum local de la fonction

Dans le cas où le second terme présente un coefficient négatif, le point q_{eq} est un maximum local de l'énergie potentielle. Les solutions de l'équation du mouvement sont des combinaisons de cosinus et sinus hyperboliques de taux de croissance ω_0.
Si le système est légèrement perturbé au voisinage de la position d'équilibre, celui-ci va s'en éloigner exponentiellement vite. L'équilibre est dit *instable*. En pratique, le maintien d'un système dans une position d'équilibre instable demande de fixer $q = q_{eq}$ avec une précision arbitrairement grande, ce qui est impossible. Un exemple de ce comportement est le pendule simple autour de la position $\theta = \pi$.

Un potentiel peut présenter plusieurs positions d'équilibre. Par exemple, le potentiel de Landau

$$U_L(x) = x^4 - x^2 \tag{97}$$

a pour dérivée

$$\frac{dU_L}{dx}(x) = 4\,x^3 - 2\,x = 2\,x\big(2\,x^2 - 1\big) = 4\,x\big(x - 1/\sqrt{2}\big)\big(x + 1/\sqrt{2}\big)\,. \tag{98}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sont deux positions d'équilibre stable, alors que $x = 0$ est une position d'équilibre instable.

- Cas n°2 : système à deux dimension

Dans cette partie, nous allons montrer ce qui change lorsque le nombre de coordonnées généralisées devient strictement plus grand que 1. Soit un système à deux coordonnées :

$$L\big(q_1, \mathring{q}_1, q_2, \mathring{q}_2, t\big) = \frac{1}{2}m\big(\mathring{q}_1^2 + \mathring{q}_2^2\big) - U\big(q_1, q_2\big)\,. \tag{99}$$

La condition d'équilibre s'écrit à présent :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial q_1}\right|_{q_1^{eq}, q_2^{eq}} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial q_2}\right|_{q_1^{eq}, q_2^{eq}} = 0\,. \end{cases} \tag{100}$$

$$U\big(q_1,q_2\big) \underset{q\to q_{eq}}{=} U\big(q_1^{eq},q_2^{eq}\big) + \frac{\big(q_1-q_1^{eq}\big)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\bigg|_{q_1^{eq},q_2^{eq}} + \frac{\big(q_2-q_2^{eq}\big)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\bigg|_{q_1^{eq},q_2^{eq}} + \big(q_1-q_1^{eq}\big)\big(q_2-q_2^{eq}\big)\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\partial q_2}\bigg|_{q_1^{eq},q_2^{eq}} + O\big(|q-q_{eq}|^3\big)\,. \tag{101}$$

Il devient alors intéressant d'écrire sous forme matricielle les équations de Lagrange linéarisées :

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \Lambda\cdot\begin{pmatrix} q_1-q_1^{eq} \\ q_2-q_2^{eq} \end{pmatrix} = 0\,, \tag{102}$$

où

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\bigg|_{q_1^{eq},q_2^{eq}}\,. \tag{103}$$

La matrice Λ est symétrique et réelle, elle est donc diagonalisable. Dans une base adaptée, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}'_1 \\ \ddot{q}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm\omega_1^2 & 0 \\ 0 & \pm\omega_2^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} = 0\,, \tag{104}$$

Le système ne possède donc plus une seule, mais deux pulsations propres.
Quatre cas de figure sont à envisager en fonction des signes présents dans la matrice : le système peut être (i) stable dans les deux directions, (ii) instable suivant 1' et stable suivant 2', (iii) stable suivant 1' et instable suivant 2', ou (iv) instable dans les deux directions. En suivant la discussion dans le cas précédent, un système qui possède ne serait-ce qu'une seule direction d'instabilité ne peut être maintenu dans sa position d'équilibre, sauf si le degré de liberté correspondant est gelé. L'étude des directions de stabilité et instabilité peut également conduire à prédire suivant quel degré de liberté un système donné va s'éloigner de l'équilibre.

Un autre phénomène intéressant émergeant dans les systèmes à plus d'un degré de liberté est le phénomène de battements. Pour le comprendre, supposons que notre point d'équilibre précédent est doublement stable. La solution des équations harmoniques s'écrit :

$$\begin{cases} q'_1(t) = A\cos\big(\omega_1 t+\phi_1\big) + B\cos\big(\omega_2 t+\phi_2\big) \\ q'_2(t) = A\sin\big(\omega_1 t+\phi_1\big) + B\sin\big(\omega_2 t+\phi_2\big)\,, \end{cases} \tag{105}$$

soit, en posant $\Omega = \big(\omega_1+\omega_2\big)/2$, $\omega = \big(\omega_1-\omega_2\big)/2$, $\alpha = \big(\phi_1+\phi_2\big)/2$ et $\beta = \big(\phi_1-\phi_2\big)/2$,

$$\begin{cases} q'_1(t) = (A+B)\cos\big(\Omega t+\alpha\big)\cos\big(\omega t+\beta\big) + (B-A)\sin\big(\Omega t+\alpha\big)\sin\big(\omega t+\beta\big) \\ q'_2(t) = (A-B)\cos\big(\Omega t+\alpha\big)\cos\big(\omega t+\beta\big) - (B+A)\sin\big(\Omega t+\alpha\big)\sin\big(\omega t+\beta\big)\,, \end{cases} \tag{106}$$

Pour $|A|\simeq|B|$, et $\Omega\gg\omega$, un phénomène de modulation du signal devient clairement visible (voir Fig. 12). Autrement dit, les battements interviennent quand les deux pulsations propres ω_1 et ω_2 sont proches comparées aux échelles temporelles d'évolution du système.

III] Conclusions

Comme nous l'avons illustré dans ce chapitre, un gros avantage de la formulation lagrangienne de la mécanique par rapport à celle de Newton est la facilité avec laquelle il est possible de déterminer des intégrales premières du mouvement. Dans l'exemple du problème de Kepler,

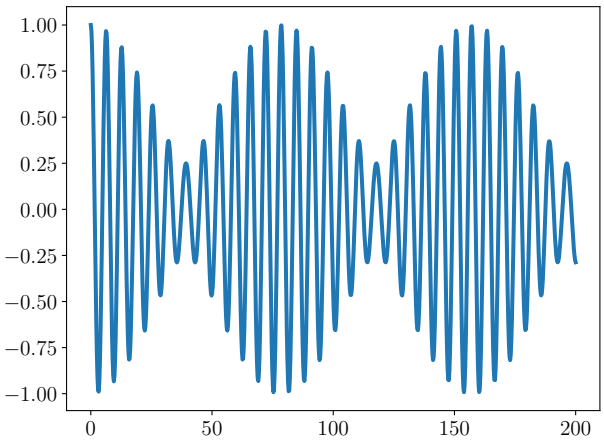


FIGURE 12 – Tracé de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)\cos(x/25) + 1/4\,\sin(x)\sin(x/25)$.

nous avons montré comment de telles équations mènent naturellement aux équations horaires, à partir desquelles peut être construite la trajectoire. Ainsi, en plus de réduire le nombre total d'équations couplées à résoudre, le formalisme lagrangien simplifie les équations du mouvement.

Nous retiendrons également le théorème de Noether, qui donne un sens fondamental à la recherche des symétries du mouvement :

$$\boxed{\textbf{Symétries} \text{ de } L\big(q, \mathring{q}, t\big) \;\Leftrightarrow\; \text{Lois de } \textbf{conservation}}\,.$$

Cours n°3 : Le principe de Hamilton

I] Introduction

Contrairement au cours n°1, où le formalisme présenté était équivalent à la mécanique de Newton, le programme de ce cours consiste à reformuler complètement la mécanique, en la basant sur de nouveaux principes fondamentaux (en particulier, nous ne pourrons pas utiliser le principe fondamental de la dynamique pour établir nos équations). Le formalisme présenté ici a pour origine une tentative de donner une assise plus confortable à la mécanique en termes de philosophie et de métaphysique. Cependant, nous nous baserons avant tout sur une reformulation moderne du problème, qui permet à la fois d'intégrer tous les progrès que la physique a fait depuis le XVIIIème siècle, mais également de montrer comment ce nouveau formalisme a permis de nombreux progrès tout au long du XXème siècle.

1) Position du problème : le principe de Fermat

Débutons par un problème d'optique géométrique. Le but est d'arriver à prédire la trajectoire que prendra un rayon lumineux dans un environnement donné (le concept même de *rayon lumineux* suppose que l'on se trouve dans un contexte où les approximations de l'optique géométrique sont valides).

Si rien ne se trouve sur la trajectoire du rayon, celui-ci se propage en ligne droite. En revanche, il n'est pas difficile de vérifier que cette loi n'est pas vraie en général, en regardant comment le

passage d'un rayon dans l'eau depuis l'air modifie sa trajectoire. Fermat proposa un principe, qui porte son nom, et qui peut être énoncé comme suit :

$$\boxed{\text{Le trajet d'un rayon lumineux entre deux points est celui qui } \textbf{minimise le temps de parcours} \text{ de la lumière entre les deux points.}} \tag{107}$$

◆ Illustration n°1 : Lois de la réfraction :

Considérons le problème de réfraction de la lumière, illustré sur la figure 13. Nous posons, sans perte de généralité, $n_1 < n_2$, soit $v_1 > v_2$.

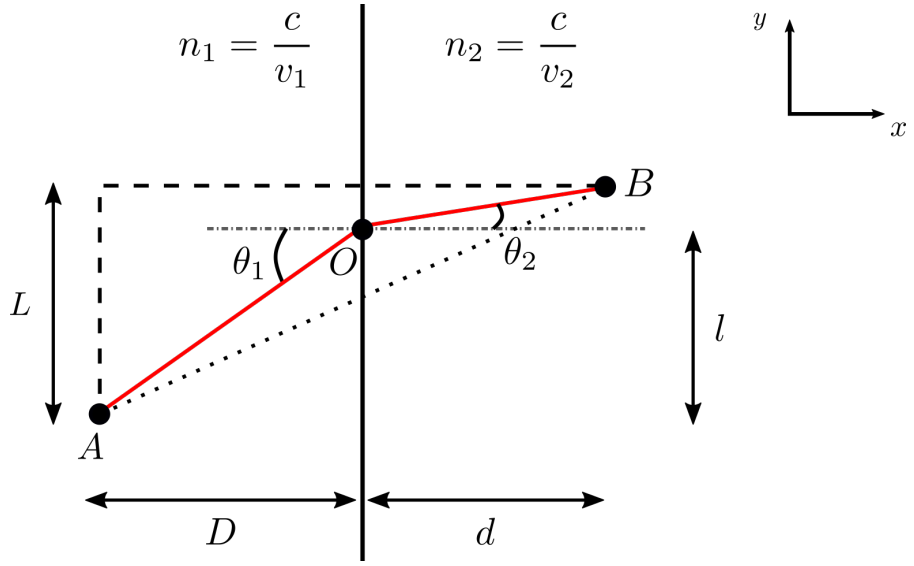


FIGURE 13 – Trajet d'un rayon lumineux à l'interface entre deux milieux d'indices différents. Le trajet en pointillés fins est le trajet le plus court si l'on ne tient pas compte de la vitesse de la lumière dans les milieux. Le trajet en pointillés longs est le trajet qui maximise le temps passé dans le milieu d'indice le plus faible (donc celui où la vitesse est la plus élevée). Le trajet réel se situe entre ces deux extrêmes et passe par le point O.

Le temps de parcours T du rayon lumineux peut être calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T &= \int_A^B dt = \int_A^O dt + \int_O^B dt \\ &= \int_A^O \frac{dl}{v_1} + \int_O^B \frac{dl}{v_2} \\ &= \frac{1}{v_1}\sqrt{l^2 + D^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(L-l)^2 + d^2}\,. \end{aligned} \tag{108}$$

Comme nous pouvons le voir, le fait que la vitesse du rayon lumineux soit constante simplifie considérablement les calculs.

La position de O qui minimise T doit être telle que :

$$\frac{dT}{dl} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{v_1}\frac{l}{\sqrt{l^2 + D^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{L-l}{\sqrt{(L-l)^2 + d^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{v_1}\sin(\theta_1) - \frac{1}{v_2}\sin(\theta_2) = 0\,, \tag{109}$$

soit finalement :

$$\boxed{n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)}\,. \tag{110}$$

La loi bien connue de la réfraction est ainsi retrouvée.

Vérifions qu'il s'agit bien d'un minimum. Soit $l = l_{opt} + \Delta l$, où l_{opt} est la valeur de l qui annule dT/dl.

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dl} &\underset{l\to l_{opt}}{=} \frac{1}{v_1}\left[\sin(\theta_1) + \frac{\Delta l}{\sqrt{l_{opt}^2 + D^2}}\right] + \frac{1}{v_2}\left[-\sin(\theta_2) - \frac{\Delta l}{\sqrt{(L - l_{opt})^2 + d^2}}\right] + O\big(\Delta l^2\big) \\ &\underset{l\to l_{opt}}{=} \Delta l\left[\frac{1}{v_1}\frac{1}{\sqrt{l_{opt}^2 + D^2}}\right]\left[1 + \frac{l}{L - l}\right] + O\big(\Delta l^2\big) \\ &\underset{l\to l_{opt}}{=} \Delta l\,\frac{L}{L - l}\left[\frac{1}{v_1}\frac{1}{\sqrt{l_{opt}^2 + D^2}}\right] + O\big(\Delta l^2\big),\end{aligned} \tag{111}$$

où l'avant dernière équation a été obtenue en utilisant la loi de la réfraction (valable pour $l = l_{opt}$). Ainsi, dT/dl a, au voisinage du point d'annulation de la dérivée, un signe égal à celui de Δl. Par conséquent, l_{opt} est bien un minimum de $T(l)$.

◆ Illustration n°2 : Lois de la réflexion :

Le plus simple ici est de remarquer que, si l'on remplace le point B d'arrivée du rayon par son symétrique B' par rapport à l'interface, comme illustré sur la figure 14, alors le problème de la *réflexion* est équivalent au problème de *réfraction* pour $n_1 = n_2$ (le rayon lumineux ne se propage que du côté 1 de l'interface, le long de AOB). Par conséquent,

$$\boxed{\theta_1 \equiv \theta_2 \ (2\pi)}, \tag{112}$$

(qui devient $\theta_1 = \theta_2$ si l'on restreint ces angles à l'intervalle $\big[0; \pi/2\big]$).

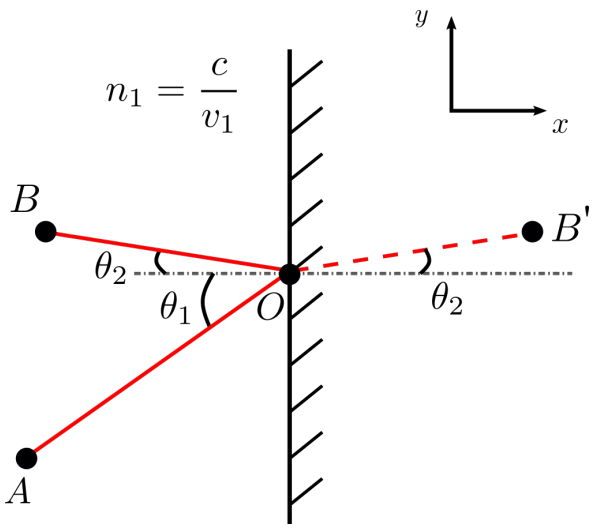


FIGURE 14 – Problème de réflexion d'un rayon lumineux sur un interface. La construction est commentée dans le texte.

Finalement, le principe de Fermat permet de reproduire (i) la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice constant, (ii) les lois de la réfraction, et donc en particulier la trajectoire

d'un rayon lumineux dans un milieu à gradient d'indice, et (iii) les lois de la réflexion. Il semble donc que ce principe de temps minimal soit un fondement cohérent de l'optique géométrique. Est-il vrai au delà de l'optique géométrique, et particulièrement, peut-on en tirer les lois de la dynamique des points matériels ? Nous allons considérer deux exemples pour fournir une réponse à cette question.

■ Exemple 1 : Le miroir sphérique concave.

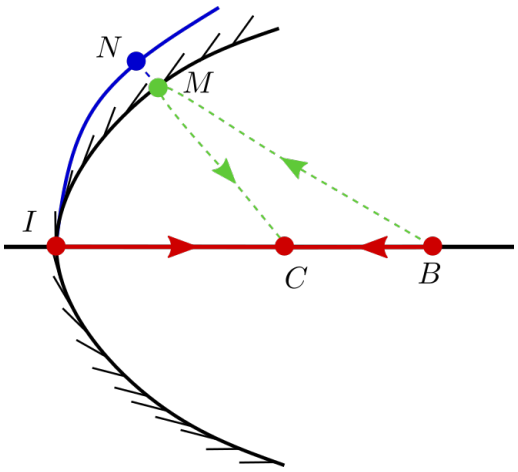


FIGURE 15 – Miroir sphérique concave de centre C. Le rayon réel CB passe par I. M est un point quelconque du miroir, pas trop éloigné de l'axe optique. N se trouve sur la sphère de rayon BI.

Considérons le système représenté sur la figure 15. Le rayon réel allant de B à C est BIC. Soit un rayon virtuel BMC.

$$BMC = BM + MC$$

$$BIC = BI + IC$$

$$BI + IC = BI + NB > BM + IC = BM + MC$$

Ainsi, le rayon réel est non pas plus *petit*, mais plus *grand* que n'importe quel rayon virtuel reliant les deux points.

▶ Leçon n°1 : Le trajet réel suivi par le rayon lumineux n'est pas celui qui rend *minimal* le temps de parcours, mais *stationnaire* ; autrement dit, ce qui est imposé est que la variation au premier ordre $dT = 0$. Ceci peut correspondre à trois cas de figure pour un système à une dimension : maximum, minimum, ou point d'inflexion (voir figure 16). Pour un système multidimensionnel, chacun de ces trois cas de figure peut être représenté dans une direction donnée.

■ Exemple 2 : La chute libre.

Considérons une particule se déplaçant de A à B dans le champ de pesanteur, conformément au schéma de la figure 17. Les deux points sont distants d'une longueur L, et la vitesse initiale a pour module v_0, et fait un angle α avec l'horizontale. La question que nous nous posons est la suivante : **la dynamique de la particule peut-elle être déduite d'un principe de temps stationnaire ?**

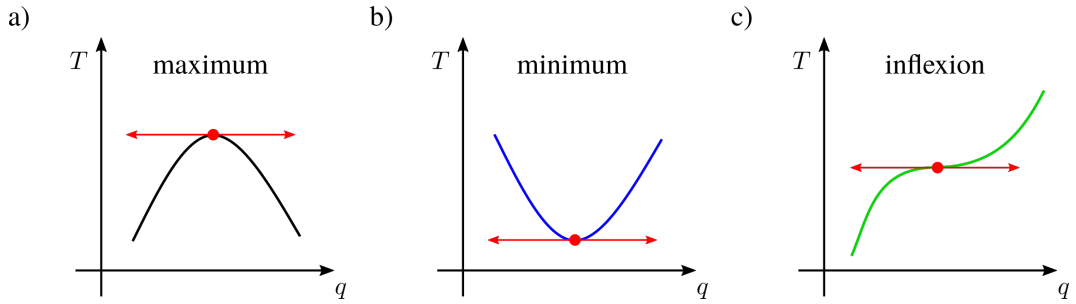


FIGURE 16 – Trois cas de figure correspondant à un temps de parcours stationnaire. La double flèche rouge représente la tangente à la courbe au point où T est stationnaire.

Tout d'abord, utilisons les lois de la dynamique pour déterminer la trajectoire réelle entre A et B avec ces conditions initiales. Nous fixons le repère spatial de manière à ce que les coordonnées de A soient $(0,0)$. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t \end{cases} . \tag{113}$$

La trajectoire est donc un arc de parabole. Le temps de parcours est simplement donné par :

$$T = \frac{x_B}{v_0 \cos(\alpha)} = \frac{L}{v_0} . \tag{114}$$

→ Problème 1 : Le temps de parcours calculé ci-dessus est le même que celui de la trajectoire non physique correspondant au mouvement rectiligne uniforme, de vitesse v_0, entre A et B.

Mais il y a pire. Acceptons le principe d'inertie seul. Alors, nécessairement, v_x =constante. Par conséquent,

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dt}{dx}\, dx = \frac{1}{v_0 \cos(\alpha)} \int_A^B dx = \frac{x_B}{v_0 \cos(\alpha)} = \frac{L}{v_0} . \tag{115}$$

Autrement dit, en acceptant le principe d'inertie seul, toute trajectoire de A à B a le même temps de parcours. Le principe de temps stationnaire ne permet donc pas de discriminer la trajectoire réelle de toutes les autres trajectoires possible ; il apparaît donc inadapté pour décrire les phénomènes mécaniques.

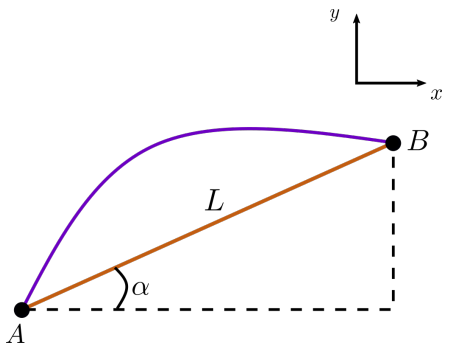


FIGURE 17 – Problème de chute libre entre deux points A et B quelconques.

→ Problème 2 : La trajectoire qui rend stationnaire le temps de parcours peut être calculée dans un contexte où seuls A et B sont donnés (mais pas $\vec{v}_0$), en appliquant les méthodes du calcul variationnel. Si l'on appelle, en toute généralité, $s(x,y)$ la coordonnée curviligne le long de la trajectoire,

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dt}{ds}\, ds\,, \tag{116}$$

et

$$\|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\mathring{x}^2 + \mathring{y}^2}\,. \tag{117}$$

Afin d'alléger les notations, nous définissons la fonction suivante :

$$f\big(x, \mathring{x}, y, \mathring{y}\big) = \frac{dt}{ds}\big(x, \mathring{x}, y, \mathring{y}\big)\,. \tag{118}$$

La condition de stationnarité de T s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\delta T &= \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \mathring{x}}\delta \mathring{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathring{y}}\delta \mathring{y}\right] ds \\
&= \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathring{x}}\frac{ds}{dt}\delta x\right]_A^B - \int_A^B \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial f}{\partial \mathring{x}}\frac{ds}{dt}\right]\delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathring{y}}\frac{ds}{dt}\delta y\right]_A^B \\
&\quad - \int_A^B \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial f}{\partial \mathring{y}}\frac{ds}{dt}\right]\delta y \\
&= 0 + 0 + 0 - \int_A^B \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial f}{\partial \mathring{x}}\frac{ds}{dt}\right]\delta x + 0 - \int_A^B \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial f}{\partial \mathring{y}}\frac{ds}{dt}\right]\delta y \\
&= 0\,,
\end{aligned} \tag{119}$$

où l'égalité rouge est une intégration par parties, l'égalité verte découle du fait que v ne dépend pas explicitement de x et de y, et l'égalité bleue est une conséquence du fait que les points de départ et d'arrivée sont fixes ($\delta x(A) = \delta x(B) = \delta y(A) = \delta y(B) = 0$).

La stationnarité de T devant être valable quelque soient δx et δy, nous en concluons :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{\partial f}{\partial \mathring{x}}\, v\right] = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{\partial f}{\partial \mathring{y}}\, v\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \mathring{x}}\, v = C_x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \mathring{y}}\, v = C_y\,, \end{cases} \tag{120}$$

où C_x et C_y sont des constantes (par rapport à s).
En reprenant les équations (117) et (118), ces résultats deviennent :

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathring{x}}{\big(\mathring{x}^2 + \mathring{y}^2\big)^{3/2}}\, v = C_x \\[2ex] -\dfrac{\mathring{y}}{\big(\mathring{x}^2 + \mathring{y}^2\big)^{3/2}}\, v = C_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \text{constante}(s) \\ v_y = \text{constante}(s)\,. \end{cases} \tag{121}$$

Ainsi, si l'on fixe les conditions aux bords (positions de A et de B), au lieu de l'habituel couple (position initiale, vitesse initiale), le mouvement qui rend le temps de parcours stationnaire est un mouvement rectiligne et uniforme. Ce résultat ne doit pas étonner, si l'on se rappelle que dans un milieu d'indice constant, les rayons lumineux se propagent en ligne droite, à vitesse constante.

▶ Leçon n°2 : L'application du principe de Fermat[1] au mouvement d'un point matériel fournit des prédictions contradictoires avec les lois de la mécanique de Newton, même dans les cas simples. Ainsi, le mouvement suivi par un point matériel n'est pas celui qui rend le temps de parcours stationnaire, mais la formulation des lois du mouvement sous la forme d'un principe d'optimisation reste une idée intéressante. Dans la suite, nous examinons quelques tentatives de formulation d'un tel principe.

2) À la recherche de l'optimum : Gauss et le principe de contrainte minimale

Gauss n'est pas connu uniquement pour ses contributions en physique, mais aussi en mathématiques. En particulier, il travailla en profondeur sur la méthode des moindres carrés, ce qui le poussa à redéfinir les lois de la dynamique de la façon suivante : soit

$$\mathcal{Z} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\ddot{q}_k - \frac{Q_k}{m_k} \right)^2 , \tag{122}$$

où m_k est la masse de la particule k, q_k une coordonnée généralisée associée, et Q_k la somme des forces généralisées agissant sur k. Dans le vocabulaire des moindres carrés, m_k est le *poids* de la contribution de k à $\mathcal{Z}$.

Considérons à un instant donné t une variation de $\mathcal{Z}$ (i) sans variation des masses m_k, et (ii) sans variation des forces, ou contraintes instantanées. Alors,

$$\delta\mathcal{Z} = \sum_{k=1}^{n} \left(2\, m_k\, \ddot{q}_k - 2\, m_k \frac{Q_k}{m_k} \right) \delta\ddot{q}_k , \tag{123}$$

de sorte que

$$\delta\mathcal{Z} = 0 \;\Leftrightarrow\; m_k \ddot{q}_k = Q_k , \tag{124}$$

(où nous avons considéré que les q_k formaient une famille libre). Cette dérivation montre que les équations du mouvement peuvent être interprétées comme la solution d'un problème de moindre carrés où le mouvement réel **minimise l'écart au mouvement libre**, correspondant d'après le principe d'inertie à un mouvement de translation rectiligne uniforme. Ce résultat peut s'étendre au cas où les q_k ne sont pas tous indépendants les uns des autres si l'on connaît les contraintes qui les relient entre eux.

▶ Conclusion : Les équations de la dynamique de Newton peuvent être reformulées sous la forme d'un problème d'optimisation où le mouvement réel minimise l'écart au mouvement libre ; autrement dit, le système tend à **réduire les variations de quantité de mouvement**. Ce résultat peut semble purement formel, mais il nous met sur la piste pour trouver la formulation de la mécanique en terme d'optimisation.

3) À la recherche de l'optimum : le principe de Maupertuis

En se basant sur les conclusions du travail de Gauss, et de ce que nous avons étudié en mécanique lagrangienne, il apparaît naturel de s'intéresser, comme Maupertuis, à la **variation de quantité de mouvement le long de la trajectoire** du système. En effet, nous avons conclu de nos études préliminaires que l'information sur la dynamique se trouve dans cette direction, les directions orthogonales portant l'information sur les contraintes que subit

1. ou plutôt de sa correction comme principe de temps de parcours stationnaire.

le système. La quantité à optimiser devient alors une quantité scalaire et non vectorielle.

Afin de trouver le mouvement qui rend stationnaire la quantité de mouvement le long de la trajectoire, Maupertuis a dû construire une nouvelle quantité physique S, appelée *action*, qui correspond à la somme de la quantité de mouvement le long de la trajectoire sur un arc γ donné :

$$S = \int_\gamma \vec{p} \cdot d\vec{l} \,. \tag{125}$$

En termes d'unités, il n'est pas difficile de vérifier que

$$\big[S\big] = E \times T = \big[\hbar\big] \,. \tag{126}$$

Le principe de Maupertuis stipule que le mouvement réel du système est celui qui rend *stationnaire* l'action S, autrement dit qui minimise les variations de quantité de mouvement le long de la trajectoire. Ceci peut se ré-écrire

$$\delta S = 0 \,. \tag{127}$$

Soit un système conservatif, d'énergie E.

$$\vec{p} \cdot d\vec{l} = m\vec{v} \cdot d\vec{l} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt}\, dt = mv^2\, dt = 2T\, dt \,,$$

soit [2]

$$S = 2 \int_\gamma T\, dt$$

Comme de plus, $E = T + U$,

$$2T = T + E - U$$

$$\Rightarrow \; S = \int_\gamma \big(E + T - U\big) dt = \text{constante}(t) + \int_\gamma L\big(q, \mathring{q}, t\big) dt \,. \tag{128}$$

Nous retiendrons l'écriture de ce principe sous la forme suivante :

$$\boxed{S = \int_\gamma L\big(q, \mathring{q}, t\big) dt \;,\; \delta S = 0} \,. \tag{129}$$

II] Le principe de Hamilton

1) Espace des configurations

◆ Définition : L'espace des configurations est l'espace à n dimensions paramétré par les $\big\{q_i\big\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Dans la suite du chapitre, lorsque nous évoquerons la *trajectoire* du système, il s'agira, sauf mention explicite contraire, de sa trajectoire dans l'espace des configurations, et non pas de sa trajectoire dans l'espace réel à trois dimensions.

2. Attention, ici T est une énergie cinétique, pas un temps de parcours !

2) Formulation du principe

Soit S l'*action* du système, définie par :

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q, \mathring{q}, t\big)dt}\,. \tag{130}$$

Étant donné un jeu de conditions aux bords $\big\{q(t_1), q(t_2)\big\}$, nécessaire pour que la solution des équations du mouvement soit unique, la trajectoire suivie par le système est celle qui rend l'action stationnaire :

$$\boxed{\delta S = 0}\,. \tag{131}$$

R Ce principe est souvent énoncé comme un *principe de moindre action*. Malgré le côté attirant de cette appellation, qui semble conforme à notre intuition suivant laquelle les lois du mouvement correspondraient à un principe de « moindre effort », nous l'éviterons dans la suite de ce cours car (i) son côté intuitif est trompeur, la relation entre S est un « effort » que fournirait le système étant en réalité assez mal définie, et (ii) comme nous l'avons expliqué plus tôt, déjà à une dimension, une condition de stationnarité n'est pas du tout équivalente à un principe de minimisation[3]. Pour des systèmes à n dimensions, le nombre de possibilités que la trajectoire réelle ne soit pas un minimum global de S devient d'autant plus fort.

3) Équations du mouvement

Supposons que $\big\{q_i\big\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme une famille libre.

$$\begin{aligned}
\delta S = 0 \;&\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \delta L\big(q, \mathring{q}, t\big)dt = 0 \\
&\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\delta \mathring{q}_i\right) dt = 0 \\
&\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right)\delta q_i\, dt = 0 \\
&\Rightarrow\; \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right)\delta q_i\right] dt + 0 = 0\,,
\end{aligned} \tag{132}$$

où l'égalité rouge est une intégration par parties, et le terme bleu résulte du fait que les conditions aux bords sont fixées, donc $\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Nous avons supposé que L ne dépendait pas explicitement du temps, afin d'alléger les notations. Il n'est pas difficile de se convaincre que le terme supplémentaire obtenu dans ce cas serait une pure constante qui ne joue aucun rôle dans les équations du mouvement. Finalement, puisque les q_i sont tous linéairement indépendants par hypothèse,

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!],\ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right) = 0}\,. \tag{133}$$

Ces équations, appelées *équations d'Euler-Lagrange* sont exactement équivalentes aux équations de Lagrange (28), et donc contiennent toute l'information sur la dynamique du système, donnant des résultats compatibles avec les équations de Newton lorsque les deux types d'équations

3. Celui-ci n'est en réalité vrai que dans la formulation de Gauss sous formes de moindres carrés où par construction, la solution stationnaire est également la solution minimale.

du mouvement peuvent être comparées. Mais il est important de bien comprendre la démarche : dans le cours n°1, les équations de Lagrange ont été **déduites** des équations de Newton, dans le cas où les coordonnées cartésiennes usuelles sont remplacées par un jeu de coordonnées généralisées, alors qu'ici, les équations d'Euler-Lagrange sont dérivées du principe de Hamilton sans aucune référence au principe fondamental de la dynamique. Cela explique pourquoi, comme nous allons le voir dans la suite, ce formalisme permet en réalité d'aller *au-delà* de la physique de Newton.

La mécanique fondée sur de principe de Hamilton ne fait plus appel au concept de *forces*, et ses équations du mouvement se présentent sous la forme d'équations aux dérivées partielles, et non plus d'équations différentielles ordinaires. Cette reformulation de la mécanique est plus complète et plus souple, ce qui explique que c'est elle qui a permis de faire le lien vers :

- la théorie de la relativité (restreinte et générale).
- les équations d'ondes, matérielles ou électromagnétiques.
- la théorie des interactions faible et forte, et plus généralement, le modèle standard de la physique des particules.
- les liens entre mécanique classique et quantique.

4) Cas des q_i non indépendants — multiplicateurs de Lagrange

Supposons que les $\{q_i\}$ soient liés par une équation de la forme :

$$f(q) = 0\,. \tag{134}$$

Une telle contrainte est dite *holonôme*.

Dans ce cas, il n'est plus possible de déduire les équations d'Euler-Lagrange du principe de Hamilton comme ci-dessus. La méthode des multiplicateurs de Lagrange vise à rajouter une variable λ, de manière à lever la contrainte : le nombre de variables devient alors égal au nombre d'équations, et le système peut être décrit par n variables libres. Bien entendu, la nouvelle variable doit être introduite de façon à ne pas modifier les équations de la dynamique, ce qui peut se faire via la transformation suivante :

$$L\big(q,\mathring{q},t\big) \mapsto \overline{L}\big(q,\mathring{q},\lambda,t\big) = L\big(q,\mathring{q},t\big) + \lambda\, f(q)\,. \tag{135}$$

Ainsi, puisque $f(q) = 0$, $\overline{L}\big(q,\mathring{q},\lambda,t\big) = L\big(q,\mathring{q},t\big)$.

La condition de stationnarité de l'action met alors en jeu une nouvelle équation :

$$\delta\overline{S}(\lambda) = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta\overline{L}\big(q,\mathring{q},\lambda,t\big) + \delta\lambda\, f(q)\Big]dt\,. \tag{136}$$

Les équations du mouvement deviennent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{L}}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\overline{L}}{\partial\mathring{q}_i}\right) = 0 \\ \qquad\qquad f(q) = 0\,. \end{cases} \tag{137}$$

La dernière équation, qui provient de la stationnarité par rapport à $\delta\lambda$ assure donc que $L = \overline{L}$, et les équations du mouvement sont inchangées, bien que les variables $\{q_i\}$ aient été découplées.

Exemple 1 : Le pendule simple

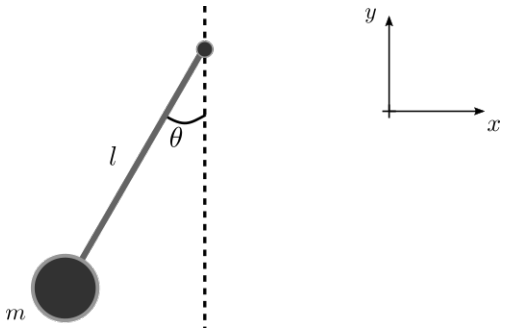


FIGURE 18 – Pendule simple

Comme nous l'avons expliqué en introduction, ce problème est un problème à une dimension. Cependant, en le reformulant comme un problème à **deux dimensions plus une contrainte**, nous pouvons calculer la force de tension du fil. Nous choisissons donc comme coordonnées (r, θ), et imposons la contrainte :

$$r - l = 0\,. \tag{138}$$

La fonction de Lagrange du problème s'écrit alors :

$$L\big(r, \mathring{r}, \theta, \mathring{\theta}, t\big) = \frac{1}{2} m\, \mathring{r}^2 + \frac{1}{2} m\, r^2\, \mathring{\theta}^2 + mgr\cos\theta\,. \tag{139}$$

La fonction de Lagrange modifiée devient alors :

$$\overline{L}\big(r, \mathring{r}, \theta, \mathring{\theta}, \lambda, t\big) = \frac{1}{2} m\, \mathring{r}^2 + \frac{1}{2} m\, r^2\, \mathring{\theta}^2 + mgr\cos(\theta) + \lambda\big(r - l\big)\,. \tag{140}$$

Les équations du mouvement correspondantes sont :

$$\begin{cases} mr\,\mathring{\theta}^2 + mg\cos(\theta) + \lambda - m\mathring{\mathring{r}} = 0 \\ mgr\sin(\theta) + mr^2\mathring{\mathring{\theta}} + mr\mathring{r}\,\mathring{\theta}^2 = 0 \\ r - l = 0\,. \end{cases} \tag{141}$$

En combinant les deux dernières équations, nous retrouvons l'équation du mouvement habituelle :

$$\mathring{\mathring{\theta}} + \frac{g}{l}\,\theta = 0\,, \tag{142}$$

la troisième équation donne la contrainte ; quand à la première, elle s'écrit :

$$\lambda = mg\cos(\theta) + m\,l\,\mathring{\theta}^2\,. \tag{143}$$

Dans cette équation, le premier terme est dû au poids, la seconde contribution est la force centrifuge. λ s'interprète alors comme la force de tension du fil.

Exemple 2 : Cylindre sur un plan incliné

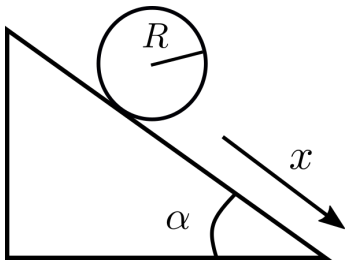


FIGURE 19 – Cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné.

Considérons un cylindre qui roule sans frottements, et sans glissement sur un plan incliné. La condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$\mathring{x} = R\,\mathring{\theta} \tag{144}$$

(les notations sont définies sur la figure 19, sauf θ qui est l'angle de rotation du cylindre). Cette condition prend donc la forme d'une contrainte holonôme reliant les deux coordonnées généralisées du problème. Afin d'établir les équations du mouvement, il nous faut donc lever la contrainte, ce que nous faisons via l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange λ dans le lagrangien :

$$\overline{L}\big(x, \mathring{x}, \theta, \mathring{\theta}, \lambda, t\big) = \frac{1}{2} m\,\mathring{x}^2 + \frac{1}{2} I\,\mathring{\theta}^2 + mg\,x\,\sin(\alpha) + \lambda\big(\mathring{x} - R\,\mathring{\theta}\big)\,, \tag{145}$$

où I est le moment d'inertie du cylindre.

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \overline{L}}{\partial \mathring{x}}\right) = mg\,\sin(\alpha) - m\,\ddot{x} - \mathring{\lambda} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \overline{L}}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \overline{L}}{\partial \mathring{\theta}}\right) = 0 - I\,\ddot{\theta} + R\,\mathring{\lambda} = 0 \\[2ex] \mathring{x} - R\,\mathring{\theta} = 0 \end{cases} \tag{146}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\,\ddot{x} = mg\,\sin(\alpha) - \mathring{\lambda} \\[2ex] I\,\ddot{\theta} = R\,\mathring{\lambda} \\[2ex] \ddot{x} = R\,\ddot{\theta} \end{cases} \tag{147}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\,\ddot{x} = mg\,\sin(\alpha) - \mathring{\lambda} \\[2ex] I\,\ddot{x} = R\,\mathring{\lambda} \end{cases} \tag{148}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(m + \dfrac{I}{R}\right)\ddot{x} = mg\,\sin(\alpha) \\[2ex] \mathring{\lambda} = \dfrac{I}{R}\,\ddot{x} = \dfrac{I}{R}\,\dfrac{mg\,\sin(\alpha)}{m + I/R} \end{cases} \tag{149}$$

L'avant dernière équation permet d'identifier $\mathring{\lambda}$ comme la force de réaction. Dans le dernier système, la deuxième équation, qui donne l'expression du multiplicateur de Lagrange (ou plutôt

de sa dérivée) donne donc l'expression de la force de réaction du coin sur le cylindre.

La méthode se généralise au cas où plusieurs variables sont liées entre elles. Cette variante n'est pas présentée dans ce cours.

5) Applications simples

- Particule libre :

Dans ce cas, l'action s'écrit simplement :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(x, \mathring{x}, t\big) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \, \mathring{x}^2 \, dt \,. \tag{150}$$

$$\delta S = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x} \, \delta \mathring{x} \, dt \;\Rightarrow\; \ddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathring{x} = v_0 \,. \tag{151}$$

Nous retrouvons le principe d'inertie.

D'autre part, remarquons que grâce à cette équation, l'action peut être ré-écrite sous la forme :

$$S = \frac{1}{2} m \, v_0 \int_{t_1}^{t_2} dt \,, \tag{152}$$

de sorte que

$$\delta S = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta T = 0 \,. \tag{153}$$

Nous retrouvons le principe de Fermat dans cette limite. De même,

$$S = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} v_0 \, dt = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} \, dt = \frac{1}{2} m \int_{x_1}^{x_2} dx \,, \tag{154}$$

de sorte que

$$\delta S = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta L = 0 \,. \tag{155}$$

Le principe d'action stationnaire est **dans ce cas** équivalent à un principe de stationnarité de la longueur parcourue.

- Problème conservatif :

Nous restreignons notre étude aux cas où le potentiel U ne dépend que q, et non pas de $\mathring{q}$. Nous avons alors :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q, \mathring{q}, t\big) dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(T\big(q, \mathring{q}, t\big) - U\big(q\big)\Big) dt \,. \tag{156}$$

D'autre part,

$$E = T + U \;\Rightarrow\; U = E - T \,, \tag{157}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \Big(T + T - E\Big) dt \\ &= E\,\Delta t + 2\int_{t_1}^{t_2} T\,dt \\ &= E\,\Delta t + \int_{t_1}^{t_2} m\,\mathring{q}^2\,dt \\ &= E\,\Delta t + \int_{x_1}^{x_2} m\,\mathring{q}\,ds \\ &= E\,\Delta t + \int_{x_1}^{x_2} \vec{\pi}\cdot d\vec{s}\,, \end{aligned} \tag{158}$$

qui n'est autre que le principe de Maupertuis. Nous retiendrons :

$$\boxed{\text{Principe de } \textbf{Maupertuis} \;\Leftrightarrow\; \text{Principe de } \textbf{Hamilton} \text{ pour un système } \textbf{conservatif}}\,.$$

■ Pendule simple :

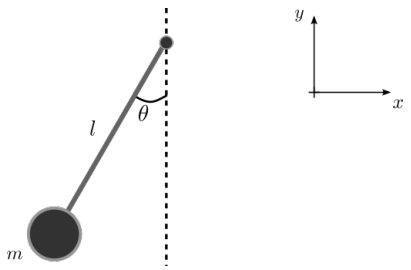


FIGURE 20 – Pendule simple.

La fonction de Lagrange du système s'écrit :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}\big) = \frac{1}{2} m\,l^2\,\mathring{\theta}^2 + mg\,l\,\cos(\theta)\,. \tag{159}$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent alors :

$$-mg\,l\,\sin(\theta) - \frac{1}{2} m\,l^2 \times 2\mathring{\mathring{\theta}} = 0\,, \tag{160}$$

soit finalement,

$$\mathring{\mathring{\theta}} + \frac{g}{l}\,\sin(\theta) = 0\,. \tag{161}$$

Cette équation est fortement non linéaire. Le plus souvent cependant, elle n'est examinée que dans la limite des petites oscillations pour lesquelles :

$$\sin(\theta) \underset{\theta\to 0}{=} \theta + O(\theta^3)\,, \tag{162}$$

soit

$$\mathring{\mathring{\theta}} + \frac{g}{l}\theta \underset{\theta\to 0}{=} O(\theta^3) \tag{163}$$

qui prend alors, de manière approchée, la forme d'une équation harmonique :

$$\mathring{\mathring{\theta}} + \omega_0^2\,\theta = 0 \tag{164}$$

avec $\omega_0^2 = g/l$, et donc une période d'oscillation $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Pendule cycloïdal :

Le principe de fonctionnement est similaire à celui du pendule simple, mais désormais, la corde du pendule s'appuie sur une cycloïde. Laissons de côté pour un moment la question du choix de cette trajectoire, et concentrons nous sur la résolution du problème.

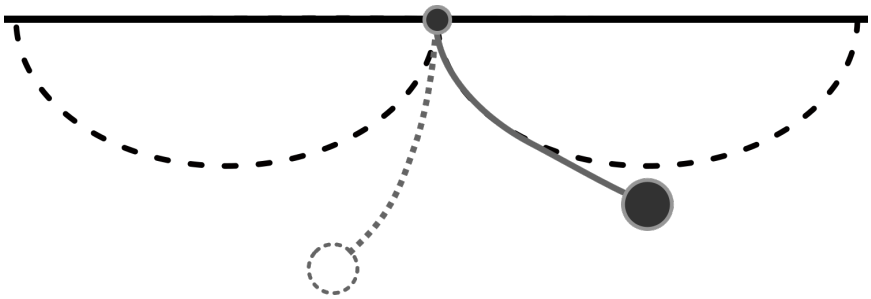


FIGURE 21 – Pendule cycloïdal.

L'équation de la cycloïde correspondant à la figure 21 est donnée par :

$$\begin{cases} x = R\big(\theta - \sin(\theta)\big) \\ y = R\big(1 - \cos(\theta)\big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathring{x} = R\big(\mathring{\theta} - \mathring{\theta}\cos(\theta)\big) \\ \mathring{y} = R\,\mathring{\theta}\sin(\theta) \end{cases} \tag{165}$$

La fonction de Lagrange s'écrit alors :

$$\begin{aligned} L\big(\theta, \mathring{\theta}\big) &= \frac{1}{2}mR^2\,\mathring{\theta}^2\big(1 - \cos(\theta)\big)^2 + \frac{1}{2}mR^2\,\mathring{\theta}^2\sin^2(\theta) + mgR\big(1 + \cos(\theta)\big) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\,\mathring{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\,\mathring{\theta}^2 - mR^2\,\mathring{\theta}^2\,\cos(\theta) + mgR\big(1 + \cos(\theta)\big) \\ &= mR^2\,\mathring{\theta}^2\big(1 - \cos(\theta)\big) + mgR\big(1 + \cos(\theta)\big) \end{aligned} \tag{166}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}}\right) &= mR^2\,\mathring{\theta}^2\,\sin(\theta) + mgR\,\sin(\theta) - \frac{d}{dt}\Big[2mR^2\,\mathring{\theta}\big(1 - \cos(\theta)\big)\Big] \\ &= mR^2\,\mathring{\theta}^2\sin(\theta) + mgR\,\sin(\theta) - 2mR^2\,\mathring{\mathring{\theta}}\big(1 - \cos(\theta)\big) - 2mR^2\,\mathring{\theta}^2\sin(\theta) \\ &= -mR^2\,\mathring{\theta}^2\sin(\theta) + mgr\,\sin(\theta) - 2mR^2\mathring{\mathring{\theta}}\big(1 - \cos(\theta)\big) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{167}$$

$$\Rightarrow \mathring{\mathring{\theta}}\big(1 - \cos(\theta)\big) + \frac{1}{2}\mathring{\theta}^2\,\sin(\theta) = \frac{\omega_0^2}{2}\,\sin(\theta) \tag{168}$$

$$\Rightarrow \mathring{\mathring{\theta}} \times 2\,\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathring{\theta}^2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \omega_0^2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{169}$$

$$\Rightarrow \mathring{\mathring{\theta}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathring{\theta}^2\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\omega_0^2}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{170}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\mathring{\theta}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{\omega_0^2}{2}\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{171}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{\omega_0^2}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{172}$$

soit, en posant $\Phi = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{4}\Phi = 0\,. \tag{173}$$

Ainsi, contrairement au pendule « simple », le pendule cycloïdal est rigoureusement isochrone : son équation du mouvement est harmonique quelle que soit l'amplitude des oscillations.

III] Symétries et lois de conservation

1) Construction du lagrangien

Du fait de l'équivalence entre le principe de Hamilton et le formalisme de Lagrange, les relations entre symétries et lois de conservation du cours n°2 s'appliquent encore. Ceci dit, puisque le principe de Hamilton permet de fonder la mécanique sans aucune référence aux lois de Newton, il nous est également possible de raisonner dans l'autre sens, c'est à dire d'utiliser les symétries du problème pour construire la fonction de Lagrange sans référence à l'expression de forces ou énergies potentielles particulières.

■ Exemple 1 : La particule libre.

Considérons un système à un degré de liberté dont le mouvement est décrit par la longueur q. L'énergie étant conservée car le système est isolé,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\,.$$

L'absence de point de référence particulier pour définir le repère dans lequel est décrit le mouvement, le mouvement est invariant par translation, soit

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow\; L\big(q, \mathring{q}, t\big) = L\big(\mathring{q}\big)\,.$$

Le mouvement n'ayant aucune direction particulière, il est invariant par parité de l'orientation spatiale :

$$L\big(\mathring{q}\big) = L\big(-\mathring{q}\big) \;\Rightarrow\; L\big(\mathring{q}\big) = L\big(\mathring{q}^2\big)\,.$$

Enfin, l'impulsion est égale à la quantité de mouvement du point matériel, soit

$$\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} = m\mathring{q} \;\Rightarrow\; L\big(\mathring{q}\big) = \frac{1}{2}m\,\mathring{q}^2 + \text{constante}$$

La fonction de Lagrange n'étant pas unique, la constante peut être prise nulle sans perte de généralité.

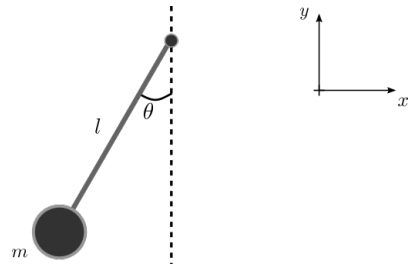


FIGURE 22 – Pendule simple.

■ Exemple 2 : Le pendule simple.

L'énergie totale est conservée :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\,.$$

Le système est invariant sous la transformation $\theta \mapsto \theta + 2\pi$:

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}\big) = L\big(\theta + 2\pi, \mathring{\theta}\big)\,.$$

Le mouvement est invariant sous la transformation $\big\{\theta \mapsto -\theta,\ t \mapsto -t\big\}$:

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}\big) = L\big(-\theta, \mathring{\theta}\big)\,.$$

L'impulsion suivant θ est la composante du moment cinétique dans la direction z orthogonale au plan du mouvement :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}} = J_z = m\,l^2\,\mathring{\theta} \;\Rightarrow\; L\big(\theta, \mathring{\theta}\big) = \frac{1}{2} m\,l^2\,\mathring{\theta}^2 + f(\theta)\,,$$

soit, en respectant les autres propriétés d'invariance, $f(\theta) = C\,\cos(\theta)$, à une constante près. En posant $C = mg\,l$, nous retrouvons l'expression bien connue :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}\big) = \frac{1}{2} m l^2\,\mathring{\theta}^2 + mg\,l\,\cos(\theta)$$

■ Exemple 3 : Perle sur un cerceau en rotation.

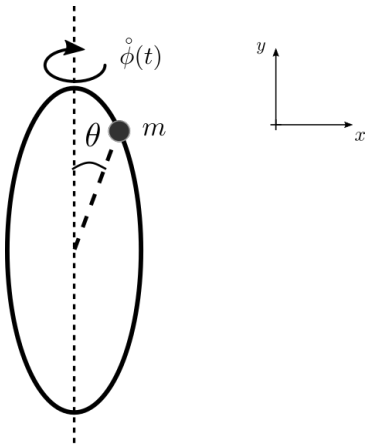


FIGURE 23 – Perle sur un cerceau en rotation.

Nous considérons le mouvement de la perle en fonction des deux coordonnées θ et ϕ. L'énergie du système est conservée (il n'y a pas de frottements),

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Le mouvement est invariant sous $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ et $\theta \mapsto -\theta$, donc $L\big(\theta\big) \propto \cos(\theta)$ (à une constante près, comme toujours). Le mouvement est invariant sous $\phi \mapsto \phi + a$, avec a quelconque, donc

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

Rappelons l'expression des trois vecteurs de la base sphérique :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \ \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \ \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La composante suivant z du moment cinétique est :

$$\begin{aligned} J_z &= \Big[mR\,\vec{e}_r \wedge \big(R\,\mathring{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\sin(\theta)\mathring{\phi}\,\vec{e}_\phi \big) \Big] \cdot \vec{e}_z \\ &= mR^2 \sin^2(\theta)\,\mathring{\phi} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathring{\phi}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ L\big(\theta, \mathring{\theta}, \mathring{\phi}\big) = \frac{mR^2}{2}\,\sin^2(\theta)\,\mathring{\phi}^2 + F\big(\theta, \mathring{\theta}\big).$$

D'autre part, dans la direction $\vec{e}_\phi$,

$$\begin{aligned} J_\phi &= \big(mR^2\,\mathring{\theta}\,\vec{e}_\phi - mR^2 \sin(\phi)\,\mathring{\phi}\,\vec{e}_\theta \big) \cdot \vec{e}_\phi \\ &= mR^2\,\mathring{\theta} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ L\big(\theta, \mathring{\theta}, \mathring{\phi}\big) = \frac{mR^2}{2}\,\mathring{\theta}^2 + G\big(\theta, \mathring{\phi}\big).$$

En rassemblant toutes les informations obtenues jusqu'à présent, nous avons donc :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}, \mathring{\phi}\big) = \frac{mR^2}{2}\,\mathring{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\,\sin^2(\theta)\mathring{\phi}^2 + C\,\cos(\theta)\,,$$

qui par identification peut s'écrire :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}, \mathring{\phi}\big) = \frac{mR^2}{2}\,\mathring{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\,\sin^2(\theta)\mathring{\phi}^2 + mgR\,\cos(\theta)\,,$$

Ainsi, à partir des symétries du mouvement, il est possible de reconstruire la fonction de Lagrange, même dans des cas non triviaux.

2) Théorème de Noether

Le principe de Hamilton stipule que :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\big(q, \mathring{q}, t\big)\, dt = 0\,. \tag{174}$$

Pour que cela reste vrai quelque soient les valeurs de t_1 et t_2, il est nécessaire que :

$$\exists G(t) \;:\; \delta \int_{t_1}^{t_2} L\big(q, \mathring{q}, t\big)\, dt = G(t_2) - G(t_1) = 0\,, \tag{175}$$

soit encore,

$$\frac{dG}{dt} = 0\,. \tag{176}$$

Ainsi, la stationnarité de l'action est elle aussi reliée aux quantités conservées. La fonction G est appelée le *générateur* associé à la transformation qui laisse S stationnaire au premier ordre. En particulier, les symétries de L, et donc de S, laissent δS invariant et sont donc associées à des quantités conservées. C'est le théorème de Noether.

■ Exemple 1 : Invariance par translation continue du temps.

Supposons que S est invariante sous $t \mapsto t - t_0$ pour tout t_0, alors,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[L\big(q, \mathring{q}, t + t_0\big) - L\big(q, \mathring{q}, t\big)\Big] dt \\
&\underset{t\to 0}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t}\, t_0\, dt + O(t_0^2) \\
&= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathring{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \mathring{\mathring{q}}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathring{q}_i + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \mathring{q}_i\right) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}&\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, \mathring{q}_i - L\big(q, \mathring{q}, t\big)\right) = \frac{dE}{dt} = 0
\end{aligned}$$

Nous retrouvons les mêmes règles que dans le formalisme de Lagrange, ce qui est cohérent puisque les équations du mouvement sont les mêmes.

■ Exemple 2 : Théorème du viriel.

Il n'est pas nécessaire qu'une transformation laisse S invariante pour que nous apprenions quelque chose sur la dynamique du système. Considérons la transformation suivante (qui n'est pas forcément une symétrie de L, S, ou du mouvement) :

$$\begin{cases} q \mapsto q + \delta\lambda\, q \\ \mathring{q} \mapsto \mathring{q} + \delta\lambda\, \mathring{q}\,. \end{cases} \tag{177}$$

Il s'agit d'une translation spatiale sans renversement du temps.

Cette transformation induit le changement d'action suivant :

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[L\big(q+\delta\lambda\, q, \mathring{q}+\delta\lambda\, \mathring{q}, t\big) - L\big(q, \mathring{q}, t\big)\Big] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big[L\big(q+\delta\lambda\, q, \mathring{q}+\delta\lambda\, \mathring{q}, t\big) - L\big(q+\delta\lambda q, \mathring{q}, t\big) + L\big(q+\delta\lambda\, q, \mathring{q}, t\big) - L\big(q, \mathring{q}, t\big)\Big] dt \\
&\underset{t\to 0}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\delta\lambda\, \mathring{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta\lambda\, q_i\right)\right] dt + O\big(\delta\lambda^2\big) \\
&\underset{t\to 0}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\, \mathring{q}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right) q_i\right] \delta\lambda\, dt + O\big(\delta\lambda^2\big) \\
&\underset{t\to 0}{=} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i\right] + O\big(\delta\lambda^2\big),
\end{aligned} \tag{178}$$

où l'égalité bleue découle des équations d'Euler-Lagrange. Nous pouvons alors définir un générateur G, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\delta S &\underset{\delta\lambda\to 0}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i\right] dt \\
&\underset{\delta\lambda\to 0}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt}\, dt \\
&= G(t_2) - G(t_1)\,.
\end{aligned} \tag{179}$$

D'autre part, si T ne dépend que de $\mathring{q}$ et U ne dépend que de q, alors,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\, \mathring{q}_i = 2\,T(\mathring{q})\,, \tag{180}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\, q_i = -\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(U\big)\,, \tag{181}$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i\right] = 2\,T(\mathring{q}) - \vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(U\big)\,. \tag{182}$$

Considérons à présent une **trajectoire fermée**. D'après le théorème de Bertrand énoncé plus haut, cela n'est possible dans ce problème que pour un potentiel newtonien ou un potentiel de Hooke. Dans ce cas, la moyenne de la quantité entre crochet (qui évolue sur un support compact) devient :

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i\right]} &= \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} \frac{d}{dt}\left[\vec{q}\cdot\vec{p}\right] dt \\
&= \lim_{\tau\to+\infty} \frac{\vec{q}\cdot\vec{p}(\tau) - \vec{q}\cdot\vec{p}(0)}{\tau} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{183}$$

Nous pouvons alors examiner les deux cas énoncés ci-dessus.

- Force newtonienne : Dans ce cas, $\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U) = -U(q)$. Le résultat (182) devient alors :

$$2\,\overline{T} = -\overline{U}\,. \tag{184}$$

Conformément à notre dérivation précédente, les états liés correspondent bien à des états pour lesquels $\overline{U} \leqslant 0$.

- Potentiel de Hooke : Dans ce cas,

$$\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(U\big) = \sum_{i=1}^{n} q_i \times k q_i = 2\,U(q)\,, \tag{185}$$

de sorte que :

$$\overline{T} = \overline{U}\,. \tag{186}$$

L'énergie se répartit en moyenne de manière égale entre énergie cinétique et énergie potentielle.

En résumé, nous avons montré que l'étude de la modification de l'action sous une transformation renseigne sur la façon dont les énergies potentielle et cinétique se répartissent lors du mouvement du système, et ce même si la transformation examinée n'est ni une symétrie de la fonction de Lagrange, ni une symétrie de l'action.

- Exemple 3 : Invariance de jauge en électromagnétisme.

Considérons un ensemble de charges $\{Q_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ plongés dans un champ électromagnétique. La fonction de Lagrange d'un tel système peut s'écrire en fonction du couple (potentiel scalaire $\phi(q,t)$, potentiel vecteur $\vec{A}(q,t)$ de la façon suivante (voir TD n°1) :

$$L\big(q,\mathring{q},t\big) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}m\,x_i^2 + Q_i\left(\phi(q,t) - \frac{\mathring{\vec{q}}}{c}\cdot\vec{A}(q,t)\right)\right]. \tag{187}$$

Les transformations de jauge sont les transformations de la forme

$$\begin{cases} \phi(q,t) \mapsto \phi(q,t) - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\chi}{\partial t}(q,t) \\[2ex] \vec{A}(q,t) \mapsto \vec{A}(q,t) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(\chi(q,t)\big) \end{cases} \tag{188}$$

qui ont la propriété de laisser invariants les expressions des champs électrique et magnétique, et donc celle des équations du mouvement. La jauge n'est fixée que si les conditions aux limites pour le potentiel le sont (ce résultat est connu sous le nom de *théorème de décomposition de Helmholtz*). Si nous appelons L^χ le lagrangien transformé, la variation de l'action sous une telle transformation s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\big[L^\chi\big(q,\mathring{q},t\big) - L\big(q,\mathring{q},t\big)\big]\,dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} + Q_i\,\frac{\mathring{\vec{q}}_i}{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\chi)\right] \end{aligned} \tag{189}$$

Nous pouvons alors effectuer un *passage à la limite continue* : la distribution discrète de charges est remplacée par une distribution continue

$$\begin{cases} \{Q_i\}_{1\leqslant i\leqslant n} \mapsto \rho(r,t) \\ \qquad Q_i\,\mathring{\vec{q}} \mapsto \vec{j}(r,t) \end{cases} \tag{190}$$

Nous obtenons alors un nouveau résultat pour la variation de l'action sur lequel nous pouvons faire une intégration par partie en négligeant les termes de bord grâce à l'hypothèse que les distributions de charges et de courant doivent s'annuler à l'infini :

$$\begin{aligned} \delta S &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\frac{\rho(r,t)}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}(r,t) + \frac{\vec{j}(r,t)}{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(\chi(r,t)\big)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}(r,t) + \mathrm{div}\big(\vec{j}(r,t)\big)\right]\frac{\chi(r,t)}{c} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\frac{d\rho}{dt}(r,t)\right]\frac{\chi(r,t)}{c} \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{191}$$

la dernière ligne étant déduite de l'invariance de l'action par la transformation de jauge. Ainsi, si $\chi(q,t) = \text{constante}$, alors la transformation de jauge a pour générateur

$$G = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\,\frac{\rho(r,t)}{c}\,\chi = Q_{tot}\times\frac{\chi}{c}\,.$$

La symétrie de jauge impose donc la conservation de la charge **globale** Q_{tot}.

À l'inverse, si χ dépend de l'espace et du temps, l'invariance de S sous les transformations de jauge entraîne $d\rho/dt = 0$, soit la conservation de la charge **locale**. Cet exemple montre encore une fois comment l'étude de la transformation de l'action sous un ensemble de symétries, a priori non triviales, sont reliées à des propriétés physiques du système étudié. Ce principe est absolument crucial pour la construction d'actions pour des systèmes pour lesquels aucune force n'est connue, et de nouvelles interactions doivent être construites : ce sont les propriétés de symétrie de l'action qui définissent le contenu physique de la théorie étudiée.

IV] Au delà des équations de Lagrange — passage au continu

1) Phonons dans les solides

Considérons un solide idéal à une dimension comportant deux espèces chimiques différentes, de masses respectives m et $r\,m$, $r \geqslant 1$ (nous discuterons de la pertinence de cette hypothèse dans la suite). Les vibrations des atomes autour de leurs positions d'équilibre sont représentées par des oscillateurs harmoniques de raideur $k = m\,\Omega^2$, Ω étant la pulsation propre de l'oscillateur. Les atomes légers sont repérés par leurs coordonnées u_n, les atomes lourds par leurs coordonnées v_n.

Nous pouvons alors écrire la fonction de Lagrange du système en tenant bien compte du fait que chaque site est relié à deux ressorts :

$$L\big(u,v,t\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}m\big(r\,\mathring{u}_n^2 + \mathring{v}_n^2\big) - \frac{1}{2}k\big(v_n - u_n\big)^2 - \frac{1}{2}k\big(u_{n+1} - v_n\big)^2\right]. \tag{192}$$

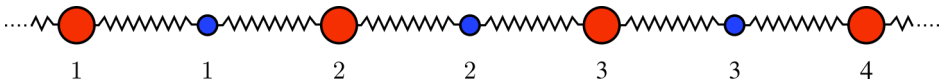


FIGURE 24 – Cristal à une dimension comportant deux espèces chimiques différentes. Les liaisons chimiques étant des oscillations de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre, elles sont modélisées par des oscillateurs harmoniques. La numérotation indiquée permet d'avoir chaque nombre représenté pour chaque espèce chimique, au lieu d'avoir une chaîne d'atomes pairs et une chaîne d'atomes impairs.

Les équations du mouvement sont alors données par :

$$\frac{\partial L}{\partial u_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{u}_n}\right) = k\big(v_n - u_n\big) + k\big(v_{n-1} - u_n\big) - r\,m\,\mathring{\mathring{u}}_n = 0\,, \tag{193}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial v_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{v}_n}\right) = k\big(u_{n+1} - v_n\big) + k\big(u_n - v_n\big) - m\,\mathring{\mathring{v}}_n = 0\,, \tag{194}$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} r\,\mathring{\mathring{u}}_n = \Omega^2\big[v_n + v_{n-1} - 2\,u_n\big] \\ \mathring{\mathring{v}}_n = \Omega^2\big[u_n + u_{n+1} - 2\,v_n\big] \end{cases}}\,. \tag{195}$$

Il faut bien comprendre qu'il s'agit de $2n$ équations couplées. Le problème tel qu'il est posé est alors très compliqué à résoudre. Afin de le simplifier, nous cherchons des solutions oscillantes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_n = U_n\,e^{i\omega t} \\ v_n = V_n\,e^{i\omega t} \end{cases} \tag{196}$$

avec $\lambda = \omega^2/\Omega^2$. Les équations du mouvement peuvent alors être ré-écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -r\,\omega^2\,U_n = \Omega^2\big[V_n + V_{n-1} - 2\,U_n\big] \\ \omega^2\,V_n = \Omega^2\big[U_n + U_{n+1} - 2\,V_n\big]\,. \end{cases} \tag{197}$$

Le couplage des équations via la dépendance en n complique encore énormément ce système d'équations. Il est alors utile de remarquer que, le cristal étant infini, le jeu d'équations est invariant sous $n \mapsto n+m$, $m \in \mathbb{N}$. Cela suggère une périodicité supplémentaire dans les solutions.

$$\begin{cases} U_n = U\,e^{in\phi} \\ V_n = V\,e^{in\phi} \end{cases} \tag{198}$$

Les équations du mouvement sont alors transformées en :

$$\begin{cases} \big(2 - r\,\lambda\big) = \big(1 + e^{-i\phi}\big)V \\ \big(2 - \lambda\big) = \big(1 + e^{i\phi}\big)U \end{cases} \tag{199}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \big(2 - r\,\lambda\big)U - \big(1 + e^{-i\phi}\big)V = 0 \\ \big(1 + e^{i\phi}\big)U - \big(2 - \lambda\big)V = 0 \end{cases} \tag{200}$$

Notons que ces équations ont désormais perdu leur caractère discret, bien que nous n'ayons pas à proprement parlé effectué de passage à la limite continue (c'est ici la condition de périodicité qui

permet de s'affranchir de l'indice discret). L'existence d'une solution non triviale à ce système requiert :

$$\begin{vmatrix} 2 - r\,\lambda & -\left(1 + e^{-i\phi}\right) \\ \left(1 + e^{i\phi}\right) & -2 + \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{201}$$

$$\Rightarrow\ -\left(2 - r\,\lambda\right)\left(2 - \lambda\right) + \left(1 + e^{i\phi}\right)\left(1 + e^{-i\phi}\right) = 0 \tag{202}$$

$$\Rightarrow\ -r\,\lambda^2 + 2\left(1 + r\right)\lambda - 2 - 2\,\cos(\phi) = 0 \tag{203}$$

$$\Rightarrow\ r\,\lambda^2 - 2\left(1 + r\right)\lambda + 4\,\sin^2\left(\phi/2\right) = 0 \tag{204}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \lambda^2 &= \frac{1+r}{r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{4\left(r+1\right)^2 - 16\,r\,\sin^2\left(\phi/2\right)} \\ &= \frac{1+r}{r} \pm \frac{1}{r}\sqrt{r^2 + 2\,r + 1 - 4\,r\,\sin^2\left(\phi/2\right)} \\ &= \frac{1+r}{r} \pm \frac{1}{r}\sqrt{r^2 + 1 + 2\,r\,\cos(\phi)} \end{aligned} \tag{205}$$

Le système admet donc deux modes de vibration : le phonon dit *acoustique* tel que $\omega_{ac}(\phi \to 0) = 0$, et le phonon dit *optique* tel que $\omega_{opt}(\phi \to 0) \neq 0$.

$$\begin{cases} \omega_{opt}^2(\phi) = \Omega^2 \dfrac{1 + r + \sqrt{1 + r^2 + 2\,r\cos(\phi)}}{r} \\[2ex] \omega_{ac}^2(\phi) = \Omega^2 \dfrac{1 + r - \sqrt{1 + r^2 + 2\,r\cos(\phi)}}{r} \end{cases} \tag{206}$$

Notons que, dans la mesure où $\left|\cos(\phi)\right| \leqslant 1$, $1 + r^2 + 2\,r\cos(\phi) \geqslant 0$, de sorte que les deux types de modes sont toujours définis.

Afin de comprendre un peu mieux le nom donné à ces deux modes, nous pouvons faire l'observation suivante : ϕ est le déphasage typique entre deux sites voisins pour une espèce chimique donnée (donc un site sur deux en réalité, mais cette subtilité n'apporte rien ici). Ainsi, nous pouvons nous attendre à $\phi \sim a/L$, où a est le paramètre de maille, et L la taille totale du cristal. Par conséquent, $\phi \ll 1$ sonde les grandes longueurs, alors que $\phi \simeq \pi$ sonde les petites longueurs. Comme nous allons le montrer prochainement, $\omega_{ac}(\phi) \underset{\phi \ll 1}{\propto} \phi + O(\phi^2)$; ce mode se comporte donc comme un oscillateur harmonique dans la limite des grandes distances. En effet, pour une solution typique de l'équation de d'Alembert, $\omega \propto 1/L$. En résumé, la branche pour laquelle le phonon se comporte comme une onde acoustique habituelle dans le solide est la branche acoustique.' La seconde branche, pour laquelle ω est non nul dans la limite $\phi \to 0$ est la branche optique, en référence aux longueurs d'onde typiques qu'il faut pour exciter de telles vibrations.

Au voisinage de $\phi = 0$,

$$1 + r^2 + 2\,r\,\cos(\theta) \underset{\phi \ll 1}{=} (1 + r)^2 - r\,\phi^2 + O\left(\phi^4\right), \tag{207}$$

de sorte que,

$$\sqrt{1 + r^2 + 2\,r\,\cos(\theta)} \underset{\phi \ll 1}{=} (1 + r)\left(1 - \frac{r}{4(1+r)^2}\,\phi^2 + O\left(\phi^3\right)\right), \tag{208}$$

soit finalement :

$$\begin{cases} \omega_{opt}^2(\phi) \underset{\phi \ll 1}{=} \Omega^2 \dfrac{2(1+r)}{r}\left[1 - \dfrac{r}{4(1+r)^2}\phi^2\right] + O\big(\phi^3\big) \\ \omega_{ac}^2(\phi) \underset{\phi \ll 1}{=} \dfrac{\Omega^2 \phi^2}{2(1+r)} + O\big(\phi^3\big)\,. \end{cases} \tag{209}$$

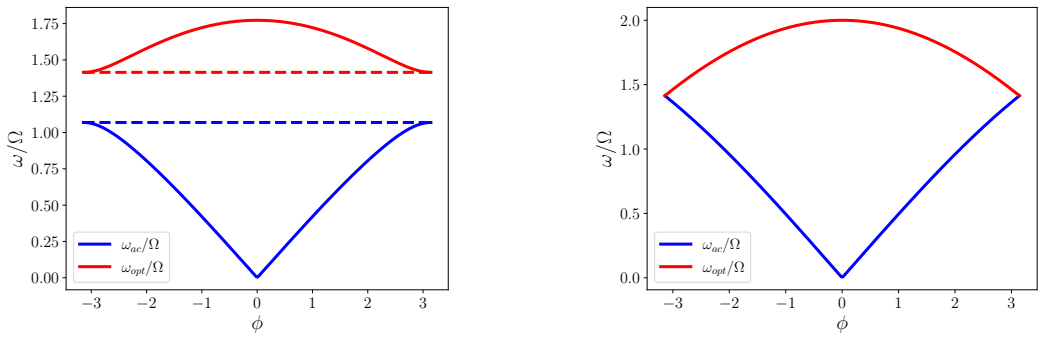
De même :

$$\begin{cases} \omega_{opt}^2(\phi) \underset{\phi-\pi \ll 1}{=} 2\,\Omega^2 + \dfrac{\big(\phi-\pi\big)^2}{2(r-1)} + O\big((\phi-\pi)^3\big) \\ \omega_{ac}^2(\phi) \underset{\phi-\pi \ll 1}{=} \dfrac{2\,\Omega^2}{r} - \dfrac{\big(\phi-\pi\big)^2}{2(r-1)} + O\big((\phi-\pi)^3\big)\,. \end{cases} \tag{210}$$

Les fonctions correspondantes sont tracées sur la figure 25. Au voisinage de $\phi = 0$, $U/V = 1 - \lambda/2$; les deux types de vibrations sont donc :

- le phonon acoustique pour lequel $\lambda = 0$, les atomes vibrent donc tous en phase.
- le phonon optique pour lequel $\lambda = 2(1+r)/r$, soit $U/V = -1/r$. Les atomes vibrent en opposition de phase, avec un rapport d'amplitude déterminé par le rapport de leurs masses.

La limite en $\phi \to \pi$ des deux modes de vibration est a priori différente (voir figure 25 a)). Pour la bande de fréquences séparant les deux asymptotes, appelée *bande interdite*, il n'existe pas de solution propagative à l'équation d'onde. Les ondes ayant de telles pulsations sont donc évanescentes.



(a) $r = 1.75$ (b) $r = 1$

FIGURE 25 – Représentation des branches optique et acoustique des phonons dans un solide. a) Cas à deux espèces, avec un rapport de masses de 7/4. b) Cas à une espèce, $r = 1$.

Dans la limite $r \to 1$ dans laquelle une seule espèce est présente, le deux phonons se rejoignent en $\phi \equiv \pi$ (2π) (voir figure 25 b)). Il n'y a alors plus de bande interdite. Des solutions propagatives existent pour toute la gamme de fréquences entre 0 et 2Ω.

Ce premier exemple de passage au continu montre comment le formalisme de l'action permet de traiter un problème ondulatoire de la même manière qu'un problème de particules en interaction. Cependant, nous n'avons pas réalisé de passage à la limite continue à proprement

parler, ni généré l'équation d'onde à partir de la fonction de Lagrange. Nous allons traiter ces questions dans la section suivante.

2) Chaîne de pendules couplés

Considérons N pendules identiques, de longueur l et de masse m, couplés par un fil de torsion et oscillant dans le plan orthogonal à la direction de couplage. L'angle que fait chaque pendule i avec la verticale est appelé θ_i. Le couplage via le fil de torsion ne couple que les premiers voisins, sous une force de type harmonique (comme s'il s'agissait d'une perturbation au voisinage du point d'équilibre où tous les pendules sont à l'arrêt, même si en vérité, nous verrons que les solutions typiques n'ont pas un profil de petite oscillation) indexé par une constante de couplage k : $k\big(\theta_i - \theta_{i-1}\big)^2/2$.

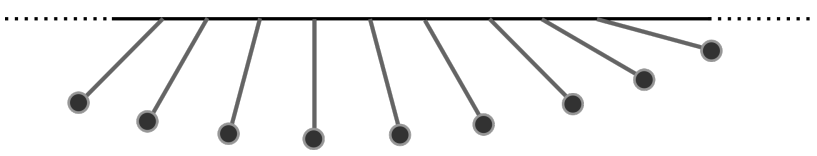


FIGURE 26 – Chaîne de pendules couplés les uns aux autres par un fil de torsion.

La fonction de Lagrange doit de nouveau être exprimée comme une somme sur tous les pendules de la chaîne ; chacun étant couplé à un seul autre pendule, pour éviter de compter deux fois chaque interaction :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}, t\big) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[m\frac{l^2}{2}\mathring{\theta}_i^2 + mgl\,\cos(\theta_i) - \frac{k}{2}\big(\theta_i - \theta_{i-1}\big)^2 \right] . \tag{211}$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}_j}\right) = 0 \tag{212}$$

$$\Rightarrow\ -mgl\,\sin(\theta_j) + k\big(\theta_i - \theta_{i-1}\big) + k\big(\theta_i - \theta_{i+1}\big) - ml^2\mathring{\mathring{\theta}}_j = 0\,, \tag{213}$$

soit finalement

$$\boxed{\mathring{\mathring{\theta}}_j + \omega_0^2 \sin(\theta_j) + \frac{k}{ml^2}\big(\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\,\theta_i\big) = 0}\,, \tag{214}$$

avec $\omega_0^2 = g/l$ la pulsation propre d'un pendule indépendant.

De même que dans l'exemple précédent, la difficulté principale vient du fait que nous devons résoudre une infinité d'équations couplées. Pour simplifier, effectuons un passage à la limite continue. Soit δ la distance séparant deux pendule consécutifs. Prenons la limite :

$$\delta \to 0\ ,\ \lambda = \frac{k\,\delta^2}{m} = \text{constante}\,. \tag{215}$$

Dans cette limite, l'ensemble des angles θ_i est remplacé par un *champ scalaire continu* $\varphi(x,t)$, tel que :

$$\forall j \in \mathbb{Z}\ ,\ \varphi\big(j\,\delta, t\big) = \theta_j(t)\,. \tag{216}$$

Les propriétés élémentaires de la dérivée permettent d'établir de plus que :

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\theta_j(t)-\theta_{j-1}(t)}{\delta}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\big(j\,\delta,t\big)\,, \tag{217}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{\big(\theta_{j+1}(t)-\theta_j(t)\big)-\big(\theta_j(t)-\theta_{j-1}(t)\big)}{\delta^2}&=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\big((j+1)\delta,t\big)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\big(j\,\delta,t\big)\right]\\&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\big((j+1)\delta,t\big)\,,\end{aligned} \tag{218}$$

de sorte que l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)+\omega_0^2\sin\big(\varphi(x,t)\big)+\frac{\lambda}{l^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(x,t)=0}\,. \tag{219}$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de Sine-Gordon*. C'est une équation d'onde qui, contrairement à l'équation de d'Alembert possède un terme non linéaire, ce qui n'est pas étonnant si l'on se rappelle que le modèle microscopique, la chaîne de pendules simples couplés, était déjà un nombre infini de système à la dynamique non linéaire en interaction.

Notons bien que dans cet exemple, où la limite continue a été prise explicitement, c'est bien des équations du mouvement d'Euler-Lagrange que découle l'équation d'onde pour le champ scalaire continu $\varphi(x,t)$. De cette manière, en effectuant ce type de prise de limite, il est possible de généraliser le formalisme de l'action au cas de champs continus, et le principe de Hamilton reste valable.

Plus précisément, la fonction de Lagrange L, qui était une fonction de **toutes** les variables couplées θ_i devient une **fonction de la fonction** $\varphi(x,t)$; un tel objet s'appelle une *fonctionnelle*. Afin de distinguer les fonctions des fonctionnelles, il est d'usage de noter entre parenthèses les variables d'une fonction, et entre crochets les variables d'une fonctionnelle. Concrètement, nous définissons la *densité de lagrangien* $\mathcal{L}\big[\varphi;t\big]$ dans l'espace à n dimensions par :

$$L\big[\varphi;t\big]=\int_{x_1}^{x_2}d^nx\,\mathcal{L}\big[\varphi;t\big]\,, \tag{220}$$

où il est important de comprendre que la dépendance fonctionnelle signifie une dépendance non seulement en φ, mais également de toutes ses dérivées $\partial_x\varphi$, $\partial_t\varphi$, $\partial_x^2\varphi$, $\partial_t^2\varphi$, $\partial_x\partial_t\varphi$, ... L'action devient alors :

$$\boxed{S\big[\varphi\big]=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}d^nx\,\mathcal{L}\big[\varphi;t\big]}\,, \tag{221}$$

Les particules et les ondes sont donc traitées similairement, dans le même formalisme. De plus, la symétrie entre les dépendances en x et t est très utile pour étendre ce formalisme à ceux des relativités restreinte et générale, où la séparation entre espace et temps perds sa pertinence. En effectuant un raisonnement analogue à celui appliqué pour la fonction de Lagrange d'un nombre fini de variable, il est possible d'établir des équations d'Euler-Lagrange pour la densité de lagrangien $l[\phi]$:

$$\boxed{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\big(\partial_{x_i}\varphi\big)}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\big(\partial_t\varphi\big)}\right)=0}\,, \tag{222}$$

où le $\delta/\delta\varphi$ est l'opérateur *dérivée fonctionnelle* par rapport à φ . Nous n'approfondissons pas plus sur le calcul différentiel et intégral avec des fonctionnelles, le message important à retenir ici est la similarité entre les équations d'Euler-Lagrange sur la fonction de Lagrange et la densité de lagrangien, et la mise en évidence d'une structure d'espace-temps dans ces dernières équations, contrairement à ce qu'il se passe pour les équations du mouvement sur la fonction de Lagrange où les rôles de q et de t sont clairement dissymétriques.

■ Exemple :

Afin de se familiariser avec le formalisme, nous allons traiter, au lieu de l'équation de Sine-Gordon, le modèle minimal suivant : considérons une densité de lagrangien comportant un terme *cinétique* (en rouge) et un terme de *auto-interaction* (en bleu).

$$\mathcal{L}[\varphi] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \right] . \tag{223}$$

En employant une heuristique triviale de la dérivée fonctionnelle (ce n'est pas sur ce point que nous voulons insister ici), nous pouvons écrire :

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} = 0 \,, \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_x\varphi)} = -\alpha(\partial_x\varphi) \,, \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_t\varphi)} = \mu(\partial_t\varphi) \,, \tag{224}$$

de sorte que l'équation d'Euler-Lagrange correspondante devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0} \,. \tag{225}$$

Nous reconnaissons là une équation de d'Alembert. Cette équation est linéaire, ses solutions peuvent être décomposées dans une base d'ondes planes progressives monochromatiques.

■ Bonus : Étude de quelques solutions de l'équation de Sine-Gordon.

Contrairement à l'équation de d'Alembert, l'équation de Sine-Gordon est non-linéaire, ce qui veut dire que le principe de superposition ne s'applique pas : nous ne pouvons pas approcher la solution générale en découpant le problème en sous-problèmes plus faciles à résoudre, puis en combinant les solutions. Il est généralement vain d'essayer d'obtenir la solution générale d'une équation non-linéaire de ce type. En revanche, nous allons nous intéresser à des solutions particulières, appelées *ondes soliton*, qui se propagent sans se déformer, et dont la forme est liée intrinsèquement à la non-linéarité de l'équation de Sine-Gordon.

Tout d'abord, adimensionons l'équation :

$$\tau = \omega_0 t \,, \quad X = \frac{\sqrt{\lambda}}{l\omega_0} x \,, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}(X,\tau) + \sin\big(\varphi(X,\tau)\big) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}(X,\tau) = 0 \,. \tag{226}$$

Nous cherchons des solutions sous la forme d'ondes progressives $\Phi(u)$, avec $u = \lambda(X - v\tau)$, λ et v étant des paramètres du modèle que nous fixerons plus tard. Cela entraîne :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} = \lambda^2\frac{d^2\Phi}{du^2} \,, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} = \lambda^2 v^2\frac{d^2\Phi}{du^2} \,, \tag{227}$$

soit

$$\lambda^2(v^2-1)\frac{d^2\Phi}{du^2}+\sin\big(\Phi(u)\big)=0\,. \tag{228}$$

Posons $\lambda^2=\dfrac{1}{1-v^2}$, $v<1$,

$$\frac{d^2\Phi}{du^2}+\sin\big(\Phi(u)\big)=0\,. \tag{229}$$

$$\Rightarrow\ 2\frac{d\Phi}{du}\frac{d^2\Phi}{du^2}+2\frac{d\Phi}{du}\sin\big(\Phi(u)\big)=0\,. \tag{230}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{du}\left[\left(\frac{d\Phi}{du}\right)^2+2\cos\big(\Phi(u)\big)\right]=0\,. \tag{231}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{d\Phi}{du}\right)^2+2\cos\big(\Phi(u)\big)=\text{constante}(u)\,. \tag{232}$$

Imposons comme conditions au bord :

$$\lim_{u\to-\infty}\Phi(u)=\lim_{u\to-\infty}\Phi'(u)=0\,. \tag{233}$$

Par conséquent,

$$\text{constante}=2\,. \tag{234}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{d\Phi}{du}\right)^2+2\cos\big(\Phi(u)\big)=2\,. \tag{235}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{d\Phi}{du}\right)^2-4\sin^2\big(\Phi(u)/2\big)=0\,. \tag{236}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{d\Phi}{du}\right)^2=4\sin^2\big(\Phi(u)/2\big)\,. \tag{237}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\Phi}{du}=\pm2\sin\big(\Phi(u)/2\big)\,. \tag{238}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \frac{d\Phi}{du}&=\pm4\sin\big(\Phi(u)/4\big)\cos\big(\Phi(u)/4\big)\\&=\pm4\tan\big(\Phi(u)/4\big)\cos^2\big(\Phi(u)/4\big)\\&=\pm4\frac{\tan\big(\Phi(u)/4\big)}{1+\tan^2\big(\Phi(u)/4\big)}\end{aligned} \tag{239}$$

$$\Rightarrow\ \frac{du}{d\Phi}=\frac{1+\tan^2\big(\Phi/4\big)}{\pm4\,\tan\big(\Phi/4\big)}=\pm\frac{d}{d\Phi}\left[\ln\left(\tan\left(\frac{\Phi}{4}\right)\right)\right] \tag{240}$$

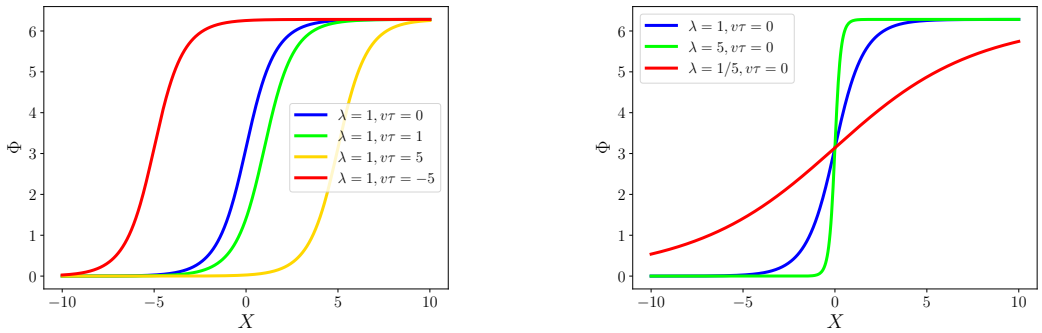
$$\Rightarrow\ u(\Phi)-u(\Phi_0)=\pm\ln\left(\tan\left(\frac{\Phi}{4}\right)\right)\mp\ln\left(\tan\left(\frac{\Phi_0}{4}\right)\right) \tag{241}$$

$$\Rightarrow \quad u(\Phi) = \pm \ln\left(\tan\left(\frac{\Phi}{4}\right)\right) + C \tag{242}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\pm u} = C' \tan\left(\frac{\Phi}{4}\right) \tag{243}$$

$$\boxed{\Phi_{\pm}(u) = 4 \arctan\left(e^{\pm\lambda(X - v\tau)}\right)}. \tag{244}$$

À partir de la représentation graphique de la solution sur la figure 27, nous pouvons émettre les remarques suivantes : (i) lorsque le temps varie, le soliton se propage, mais le front d'onde ne se déforme pas, (ii) un soliton plus rapide a une valeur de λ plus élevée et un front d'onde plus raide.



(a) Variation en fonction de t.

(b) Variation en fonction de λ.

FIGURE 27 – Représentation de la solution en soliton exposée dans le texte.

V] Conclusions

Ainsi, nous avons montré que la mécanique peut être entièrement reformulée en termes de principe d'action stationnaire. Cette formulation est plus satisfaisante :

- philosophiquement ;
- par sa capacité à s'appliquer dans des cas où la mécanique de Newton ne s'applique pas. Notamment, nous avons vu qu'ondes et particules peuvent être traitées dans le même formalisme, ce qui a bien entendu des conséquences importantes pour la reformulation de la mécanique dans le cadre des phénomènes quantiques ;
- car le lien entre transformations de l'action et physique du système est très fort. Nous avons montré par exemple qu'il est tout à fait possible de construire une fonction de Lagrange sans supposer a priori de forces, concept central de la mécanique de Newton.

■ Bonus : L'intégrale de chemin de Feynman

En mécanique quantique, le mouvement n'est plus déterminé par **la** solution qui rend l'action stationnaire. Plutôt, **toutes les trajectoires possibles interfèrent ensemble, avec un poids donné par le facteur de phase** $e^{iS/\hbar}$. Dans le cadre de l'approximation dite *quasi-classique*, près d'un point pour lequel $\delta S = 0$, la phase varie peu, et les trajectoires proches de la trajectoire classique interfèrent constructivement. Au contraire, les trajectoires très différentes de cette dernière portent des poids qui oscillent rapidement, interfèrent destructivement, et

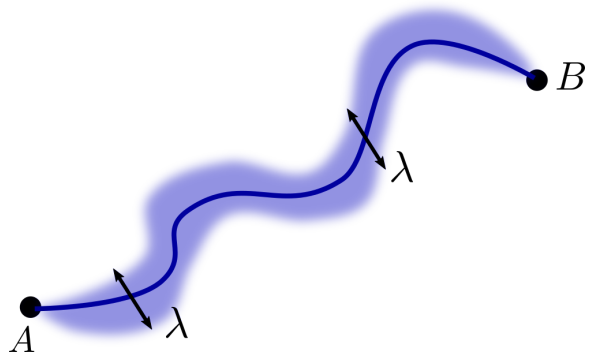


FIGURE 28 – Représentation de l'interférence entre les chemins dans la théorie de Feynman dans l'approximation quasi-classique. La trajectoire classique est représentée par le trait épais, la zone autour représente les localisations des trajectoires qui interfèrent constructivement dans le calcul des observables quantiques. Sa largeur est de l'ordre de λ, longueur d'onde associée au système par le principe de dualité onde-corpuscule.

finalement contribuent peu, voire pas du tout, au calcul des observables. La largeur typique sur laquelle les trajectoires interfèrent est de l'ordre de la longueur d'onde associée au système par le principe de dualité onde-corpuscule.

Enfin, pour des systèmes dont l'évolution est radicalement différente de celles de leurs équivalents classiques, plusieurs trajectoires différentes ont généralement des poids comparables, ce qui marque la fin du cadre de validité de l'approximation quasi-classique.

Cours n°4 : Formalisme de Hamilton

I] Introduction : la transformation de Legendre

• Définition : Transformation de Legendre

Soit une fonction f de convexité fixée ($f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$). Cette hypothèse est importante pour que la transformation soit bien définie de manière unique. La courbe représentative de f peut être construite, au choix, à partir de l'ensemble des couples $(x, f(x))$ (méthode habituelle), ou par la donnée de toutes les tangentes à la courbe représentative de f, $(x, X \mapsto f'(x)\big(X - x\big) + f(x))$ qui forment son enveloppe (voir figure 29).

La transformée de Legendre g de f par rapport à x est définie par :

$$\begin{cases} g(p) = p\,x(p) - f\big(x(p)\big) \\ p = \dfrac{df}{dx}(x)\,. \end{cases} \tag{245}$$

Prenons par exemple $x = a$. L'équation de la tangente à f en a est :

$$y(X) = f'(a)(X - a) + f(a)\,, \tag{246}$$

soit

$$y\big(X = 0\big) = -f'(a)\,a + f(a) = -g(a)\,. \tag{247}$$

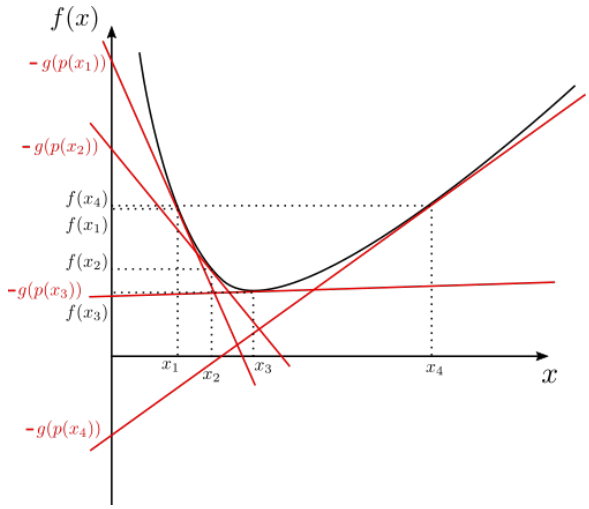


FIGURE 29 – Construction de la transformée de Legendre de la fonction f.

Ainsi, la valeur de la transformée de Legendre de f en un point a peut se lire, à un signe près, en prenant l'intersection de la tangente à f en a et de l'axe des ordonnées.

● Définition : Fonction de Hamilton

Soit $L\big(q, \mathring{q}, t\big)$. Nous rappelons la définition de l'impulsion conjuguée à q_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \, .$$

En admettant la convexité de la fonction de Lagrange, nous définissons la fonction de Hamilton $H\big(q, p, t\big)$ comme la transformée de Legendre de L par rapport à chacune des coordonnées généralisées q_i. Explicitement, cela s'écrit :

$$\boxed{H\big(q, p, t\big) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathring{q}_i(q, p, t) - L\big(q, \mathring{q}_i(q, p, t), t\big)} \, , \tag{248}$$

Cette fonction est également appelée *hamiltonien* du système. Elle représente la même information que le lagrangien, mais en utilisant un jeu de variables différentes.

■ Exemples : Tranformation de Legendre en thermodynamique.

La transformation de Legendre peut apparaître comme un outil formel et nouveau. Pourtant, elle est omniprésentes dans les cours de thermodynamique élémentaire. Par exemple, considérons un système à température et pression fixée. Le potentiel thermodynamique correspondant est l'énergie interne U pour laquelle nous pouvons écrire :

$$dU = T\,dS - P\,dV \, , \tag{249}$$

d'où nous déduisons

$$P = \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T \, . \tag{250}$$

Qu'obtenons nous si nous effectuons la transformée de Legendre de U par rapport à V ?

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T V - U = -\big(P\,V + U\big) = -H(P,S)\,, \tag{251}$$

où H est ici l'enthalpie du système. De même, si nous effectuons la transformation par rapport à T, nous obtenons :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V S - U = -\big(T\,S - U\big) = -F(V,T)\,, \tag{252}$$

où F est l'énergie libre du système.

II] Formalisme de Hamilton

La transformation de Legendre étant involutive, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} H\big(q,p,t\big) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \mathring{q}_i(q,p,t) - L\big(q,\mathring{q}_i(q,p,t),t\big) \\ \Leftrightarrow\ L\big(q,\mathring{q},t\big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathring{q}_i p_i(q,\mathring{q},t) - H\big(q,p(q,\mathring{q},t),t\big)\big)\,, \end{aligned} \tag{253}$$

d'où nous déduisons :

$$\boxed{\mathring{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}\,. \tag{254}$$

D'autre part, nous pouvons déduire de la relation de transformation de Legendre l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} dH &= dp\cdot\mathring{q} + p\cdot d\mathring{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\cdot dq - \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\cdot d\mathring{q} - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt \\ &= \mathring{q}\cdot dp - \frac{\partial L}{\partial q}\cdot dq - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt\,. \end{aligned} \tag{255}$$

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, il est possible d'en déduire les équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{cases} \mathring{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \mathring{p}_i = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}}\,. \tag{256}$$

■ <u>Exemple 1 : Particule libre.</u>

La fonction de Lagrange est :

$$L\big(q,\mathring{q},t\big) = \frac{1}{2}m\,\mathring{q}^2\,,$$

d'où

$$p = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} = m\,\mathring{q}\,.$$

Dans ce cas l'impulsion est bien la quantité de mouvement. La transformation de Legendre s'écrit :

$$\begin{aligned} H\big(q,p,t\big) &= p \times \mathring{q}(p) - L\big(q,\mathring{q}(p),t\big) \\ &= p \times \frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{2m}\,. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \mathring{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \mathring{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 0\,. \end{aligned}$$

Notons que dans le formalisme de Hamilton, n équations aux dérivées partielles d'ordre 2 en $2n$ équations aux dérivées partielles d'ordre 1.

■ Exemple 2 : Oscillateur harmonique.

FIGURE 30 – Un oscillateur harmonique.

La fonction de Lagrange est :

$$L\big(q,\mathring{q},t\big) = \frac{1}{2}m\,\mathring{q}^2 - \frac{1}{2}k\,q^2\,,$$

l'impulsion est donc :

$$p = m\,\mathring{q}\,,$$

et la fonction de Hamilton :

$$H\big(q,p,t\big) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\,q^2\,.$$

Les équations du mouvement alors :

$$\begin{cases} \mathring{q} = \dfrac{p}{m} \\ \mathring{p} = -k\,q\,, \end{cases}$$

soit, en les combinant

$$\mathring{\mathring{q}} + \frac{k}{m}\,q = 0$$

qui est bien une équation harmonique.

■ Exemple 3 : Pendule simple.

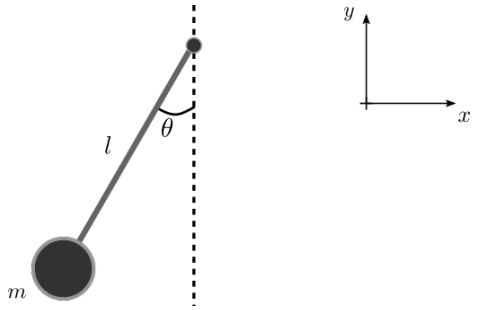


FIGURE 31 – Un pendule simple.

Nous avons déjà établi la fonction de Lagrange :

$$L\left(\theta, \mathring{\theta}, t\right) = \frac{1}{2} m\, l^2\, \mathring{\theta}^2 - mgl\, \cos(\theta)\,.$$

L'impulsion associée est :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}} = ml^2 \mathring{\theta}\,.$$

Cela conduit donc à

$$\begin{aligned} H\left(\theta, p_\theta, t\right) &= p_\theta \times \frac{p_\theta}{ml^2} + mgl\, \cos(\theta) - \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)^2 \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl\, \cos(\theta)\,. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{cases} \mathring{\theta} = \dfrac{p_\theta}{ml^2} \\ \mathring{p}_\theta = mgl\, \cos(\theta)\,, \end{cases}$$

soit en les combinant :

$$\mathring{\mathring{\theta}} + \frac{g}{l}\, \sin(\theta) = 0\,.$$

L'équation du pendule simple est bien retrouvée.

■ Exemple 4 : Perle sur un cerceau en rotation.

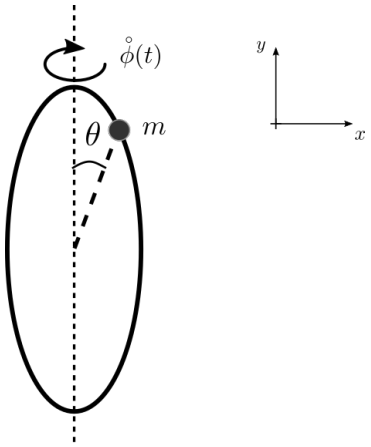


FIGURE 32 – Perle glissant sans frottements sur un cerceau en rotation.

Rappelons qu'ici, la seule coordonnée généralisée est θ, ϕ étant fixé par l'expérimentateur. La transformation de Legendre se fait donc uniquement sur θ. La fonction de Lagrange est :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}, t\big) = \frac{1}{2} mR^2\big(\mathring{\theta}^2 + \mathring{\phi}^2(t)\sin^2(\theta)\big) - mgR\cos(\theta)\,.$$

L'impulsion associée est :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \mathring{\theta}} = mR^2\mathring{\theta}\,.$$

La fonction de Hamilton est alors :

$$\begin{aligned} H\big(\theta, p_\theta, t\big) &= p_\theta \times \frac{p_\theta}{mR^2} - \frac{1}{2} mR^2\left[\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + \mathring{\phi}^2(t)\,\sin^2(\theta)\right] + mgR\cos(\theta) \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} mR^2\,\mathring{\phi}^2(t)\sin^2(\theta) + mgR\cos(\theta)\,. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathring{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{2mR^2} \\ \mathring{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2\mathring{\phi}^2(t)\cos(\theta)\sin(\theta) + mgR\sin(\theta)\,, \end{cases}$$

soit en les combinant,

$$\mathring{\mathring{\theta}} - \frac{g}{R}\sin(\theta) - \mathring{\phi}^2(t)\sin(2\theta) = 0\,.$$

III] Symétries et lois de conservations

Des équations du mouvement, nous pouvons tirer directement les deux lois suivantes :

- q_i cyclique $\Rightarrow \mathring{p}_i = 0 \Rightarrow p_i$ conservée.
- p_i cyclique $\Rightarrow \mathring{q}_i = 0 \Rightarrow q_i$ conservée.

Nous retrouvons sans surprise les conclusions tirées de l'analyse de la fonction de Lagrange, mais ici, grâce au rôle plus symétrique joué par q_i et p_i, nous pouvons directement traiter le cas où p_i aussi est cyclique.

■ Exemples :

- Soit un système invariant par translation dans la direction x. Alors,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; p_x = mv_x \text{ conservée.}$$

- Soit un système invariant par rotation dans le plan orthogonal à z. Alors,

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; p_\theta = I_z \mathring{\theta} = J_z \text{ conservée.}$$

Ici, I_z est le moment d'inertie du système par rapport à la direction z.

- Soit un système invariant par translation dans le temps. Alors,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0\,.$$

Remarquons que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[p \cdot \mathring{q} - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t}\,,$$

de sorte que

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial L}{\partial t} = 0}\,. \tag{257}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dp_i\right] + \frac{\partial H}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[-\mathring{p}_i\,dq_i + \mathring{q}_i\,dp_i\right] + \frac{\partial H}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[-\mathring{p}_i\,\mathring{q}_i\,dt + \mathring{q}_i\,\mathring{p}_i\,dt\right] + \frac{\partial H}{\partial t}dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}dt \end{aligned} \tag{258}$$

où il est crucial de bien comprendre que les égalités en rouge ne sont valable **que le long de la trajectoire du système**, où les équations de Hamilton s'appliquent. En conclusion, nous avons donc par identification, dans le cas où le système possède une invariance par translation continue du temps :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt}\,, \tag{259}$$

de sorte que l'énergie du système est conservée (comme attendu). De plus, la dérivation ci-dessus nous informe que, dans le cas non-conservatif,

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{\text{trajectoire}}}\,. \tag{260}$$

■ Exemple : Perle sur un cerceau en rotation.

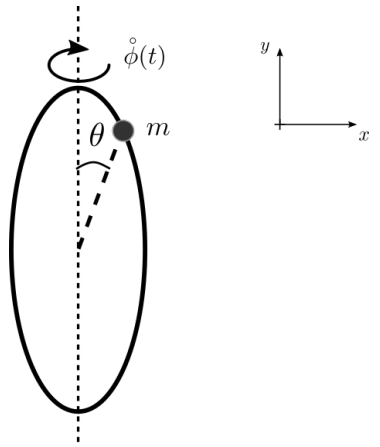


FIGURE 33 – Perle glissant sans frottements sur un cerceau en rotation

Nous avons déjà établi que

$$H\big(\theta, p_\theta, t\big) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\mathring{\phi}^2(t)\sin^2(\theta) + mgR\cos(\theta)\,.$$

Nous déduisons de ce qui précède que :

$$\frac{dE}{dt} = -mR^2\mathring{\phi}(t)\mathring{\mathring{\phi}}(t)\sin^2(\theta)\,. \tag{261}$$

Ainsi, si l'on suppose que la rotation du cerceau se fait dans le sens trigonométrique, soit $\mathring{\phi}(t) \geqslant 0$, nous voyons que :

- Si le cerceau ralentit, $\mathring{\mathring{\phi}}(t) < 0$, et $dE/dt > 0$. Lors de son freinage, le cerceau cède de l'énergie à son environnement.
- Si le cerceau accélère, $\mathring{\mathring{\phi}}(t) > 0$, et $dE/dt < 0$. Il faut fournir de l'énergie au cerceau pour maintenir son mouvement.
- Si la vitesse de rotation est constante, $\mathring{\mathring{\phi}}(t) = 0$, et $dE/dt = 0$. Le système est conservatif. Il peut continuer son mouvement sans besoin de l'extérieur (bien évidemment, un tel mouvement perpétuel n'existe pas en pratique, des forces de frottement étant toujours présentes).

Un raisonnement analogue est valable lorsque le cerceau tourne dans l'autre sens.

IV] Dynamique des observables

Soit $A(t)$ une observable. Sa différentielle peut être décomposée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}dp_i\right] + \frac{\partial A}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\mathring{q}_i dt + \frac{\partial A}{\partial p_i}\mathring{p}_i dt\right] + \frac{\partial A}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right]dt + \frac{\partial A}{\partial t}dt\,, \end{aligned} \tag{262}$$

où, de même que ci-dessus, les égalités en rouge utilisent les équations du mouvement et ne sont donc valables que le long de la trajectoire.

Il est alors d'usage de définir le *crochet de Poisson* de la façon suivante :

$$\boxed{\{\cdot,\cdot\} : (X,Y) \mapsto \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right]}, \tag{263}$$

de sorte que l'équation d'évolution de $A(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A,H\}}. \tag{264}$$

Outre l'intérêt de cette équation dans la résolution de problèmes de mécanique classique (que nous n'avons malheureusement pas le temps de traiter ici), cette équation est intéressante pour construire des liens entre théories classique et quantique d'un phénomène donné. En effet, en mécanique quantique, les observables sont représentées par des *opérateurs linéaires* (souvent eux-mêmes représentés par des matrices), dont le spectre donne l'ensemble des valeurs mesurables pour un observable donné. Dans ce contexte par exemple, H est l'opérateur associé à l'énergie du système, ses valeurs donnant les différentes énergies accessibles au système. Pour un opérateur A donné, l'évolution temporelle de l'observable associée peut se calculer via le *théorème d'Ehrenfest* qui stipule que :

$$\boxed{\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \langle[A,H]\rangle}, \tag{265}$$

où l'opérateur $[\cdot,\cdot]$ est un commutateur. Puisque A et H sont des opérateurs, l'obtention d'une équation scalaire requiert l'évaluation des différentes quantités dans un état donné, ce qui est symbolisé par la prise de crochets $\langle\cdot\rangle$. Nous n'explicitons pas plus ces concepts ici, et renvoyons le lecteur à tout livre d'introduction à la mécanique quantique. Ce que nous voulons soulever ici est la forte ressemblance entre les équations classique et quantique, qui illustre une fois de plus en quoi la reformulation de la mécanique a été cruciale pour construire la physique du XXème siècle. De plus cela donne une heuristique pour la quantification d'une théorie : les observables fonctions du temps sont représentés par des opérateurs, H y compris, et les crochets de Poisson sont remplacés par un commutateur.

V] Conclusions

Concluons ce dernier chapitre en rappelant qu'en principe, les formalismes de Lagrange et Hamilton sont équivalents. Le choix de l'un ou l'autre dépend le plus souvent de la détermination de celui qui est le plus adapté à un problème donné, ce qui requiert la connaissance de techniques non présentées dans ce cours d'introduction, notamment dans le formalisme hamiltonien, par manque de temps. Dans un premier temps, il faudra donc se satisfaire d'apprendre à utiliser l'un, ou l'autre sur des problèmes simples, jusqu'à l'obtention d'un niveau suffisant pour se confronter à des outils plus complexes.

Un des intérêts principaux du formalisme de la fonction de Hamilton est que celle-ci donne une information sur l'évolution de l'énergie du système (du moins lorsqu'elle est évaluée le long de sa trajectoire), même dans le cas de systèmes non conservatifs.

Enfin, nous avons montré que ce formalisme est particulièrement adapté à la quantification heuristique de théories classiques connues.

Bibliographie

Ce cours est appuyé sur les ouvrages suivants :

[1] C. Gignoux et B. Silvestre-Brac, *Mécanique, De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*, EDP sciences, 2002

[2] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Elsevier, third edition, 1976

[3] H. Golstein, C. Poole and J. Safko, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, 2002

[4] A. Sommerfeld, *Mechanics*, Academic Press, 1952

[5] K.A. Milton, *Schwinger's Quantum Action Principle*, Springer briefs in physics, 2015

Mécanique : Concepts fondamentaux

1 Mécanique newtonienne

L'objet de la mécanique du point classique est la description du *mouvement* des systèmes ponctuels dans un contexte donné. Le *mouvement* est constitué par l'ensemble des vecteurs vitesse au cours du temps ; cet ensemble contient donc à la fois l'information sur la trajectoire du système [1] (c'est à dire l'ensemble des positions occupées par le système au cours du temps), et sur la façon dont cette trajectoire est parcourue (avec une vitesse à peu près constante, ou au contraire très rapide au début et de plus en plus lente par exemple).

1.1 Référentiels

La définition d'un mouvement requiert la spécification d'un *référentiel*, c'est à dire d'un repère spatial et d'une horloge permettant de mesurer le temps.

Les lois de changement de référentiel en mécanique classique sont donnés par la formule suivante : si $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse dans le référentiel initial, avec une mesure de temps t, alors, dans un référentiel animé d'une vitesse $\mathbf{u}$ *par rapport au référentiel initial*, les nouvelles valeurs de la vitesse et du temps sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ t' = t \end{cases} . \tag{1}$$

Cette loi, dite *loi de composition des vitesses* découle directement de la relation de Chasles.

1.2 Relativité galiléenne

La mécanique classique est basée sur le principe suivant, appelé *principe de relativité galiléenne* :

Principe de relativité galiléenne : **L'expérimentation ne permet pas de discriminer un référentiel au repos d'un référentiel en translation rectiligne et uniforme.**

Autrement dit, tout mouvement est décrit à un vecteur vitesse stationnaire (c'est à dire indépendant du temps en norme **et** en direction) près.

1.3 Loi n°1 : Principe d'inertie

Une des conséquences du principe de relativité galiléenne est qu'il n'est pas possible de savoir si un système est au repos. Il n'existe pas de référentiel absolu dans lequel se placer pour savoir si les objets bougent ou pas. Nous formulons alors la conjecture suivante, qui est la première loi de Newton :

Principe d'inertie : **il existe une classe de référentiels, appelés « référentiels galiléens », dans lesquels tout système isolé est animé d'un mouvement stationnaire (repos ou translation rectiligne et uniforme).**

1. à une constante d'intégration près correspondant à l'origine du repère spatial choisi, autrement dit, une quantité non physique dont on peut se donc passer.

Il est très important de bien comprendre que le principe d'inertie est une *hypothèse* sur laquelle toutes les autres lois sont basées. Cette hypothèse stipule que, au moins dans certains référentiels (reliés les uns aux autres par des translations rectilignes et uniformes), le mouvement d'un système sur lequel rien n'agit est le plus simple possible. C'est en partant de cette définition du mouvement d'un système sur lequel rien n'agit qu'il est possible de formuler, par contraste, des lois de la dynamique qui indiquent comment déterminer le mouvement d'un système sur lequel un opérateur extérieur agit.

1.4 Loi n°2 : Principe fondamental de la dynamique

La seconde loi de Newton permet de déterminer le mouvement d'un système dans un référentiel galiléen, c'est à dire un référentiel pour lequel nous savons que l'absence d'action extérieure cause un mouvement stationnaire. Cette loi peut être formulée de la façon suivante :

Principe fondamental de la dynamique : **dans un référentiel galiléen, un système soumis à l'action d'opérateurs externes subit une modification de son vecteur accélération.**

Cette formulation met en avant le fait que ce principe est basé sur l'hypothèse que lorsqu'un changement a lieu, celui-ci est « le plus simple possible », c'est à dire une variation linéaire, au premier ordre. Notons que le fait qu'un système non isolé subit une modification de son accélération garantit la compatibilité avec le principe d'inertie.

Le plus souvent, ce principe est formulé de manière légèrement différente. En effet, il n'est pas difficile de se convaincre que la mise en mouvement d'un objet plus lourd est plus difficile que la mise en mouvement d'un objet plus léger, en appliquant un effort comparable dans les deux cas. La variation de vitesse, ou accélération, est donc décomposée en deux parties : la *masse inertielle* m, coefficient qui caractérise *l'inertie* du système (c'est à dire qui quantifie à quel point il est facile ou difficile de modifier son mouvement), et la *force*, qui caractérise l'action de l'opérateur externe. En ré-arrageant l'équation, de façon à mettre dans le membre de gauche tous les termes qui dépendent du système étudié, et dans le membre de droite tout ce qui dépend de l'opérateur extérieur, le principe fondamental de la dynamique prend alors la forme suivante :

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{2}$$

où $\mathbf{F}$ représente la *somme de toutes les forces* exercées sur le système étudié.

Il est notable que la manipulation précédente ne peut être effectuée sur un objet sans masse. En effet, ceux-ci ne peuvent pas réellement être traités par les lois de la mécanique newtonienne.

Insistons encore une fois sur le point suivant : le principe d'inertie n'est pas une conséquence du principe fondamental de la dynamique. Au contraire, c'est l'existence des référentiels galiléens, supposée par le principe d'inertie, qui permet l'écriture de la seconde loi de Newton.

1.5 Loi n°3 : Principe d'action-réaction

La loi d'action-réaction est un corollaire du principe fondamental de la dynamique. Considérons 2 objets, A et B en interaction, ne subissant aucune influence extérieure. Alors, l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{A, B\}$ donne :

$$m_A\,\mathbf{a}_A + m_B\,\mathbf{a}_B = \mathbf{F}_{A\to B} + \mathbf{F}_{B\to A} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

La dernière égalité stipule donc que la force exercée par A sur B est l'opposée de la force exercée par B sur A.

Malgré sa simplicité, ce principe a des conséquences profondes pour le traitement de problèmes dans lesquels plus d'un corps est présent. Nous allons donc reprendre l'exemple précédent et expliquer comment décrire le mouvement de A et B. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à A, puis à B :

$$\begin{cases} m_A \mathbf{a}_A = \mathbf{F}_{B\to A} \\ m_B \mathbf{a}_B = \mathbf{F}_{A\to B} = -\mathbf{F}_{B\to A} \end{cases}.$$

Ces équations sont très difficiles à résoudre ; en effet, $\mathbf{F}_{B\to A}$ dépend typiquement de la distance entre A et B, c'est à dire à la fois de la position de A et de celle de B. Chaque second membre dépend donc des positions de chacune des deux particules.

Pour traiter le problème à deux corps, il faut donc en réalité transformer le problème pour étudier deux problèmes plus simples : au lieu d'étudier le mouvement de A et de B, nous allons étudier le mouvement de leur centre de masse, et le mouvement relatif de B par rapport à A.

Le centre de masse de A et B a pour position $\mathbf{R} = \dfrac{m_A}{m_A+m_B}\mathbf{r}_A + \dfrac{m_B}{m_A+m_B}\mathbf{r}_B$, et pour masse m_A+m_B. Si nous appelons $\mathbf{A}$ son accélération, il n'est pas difficile d'établir, grâce au principe d'action-réaction,

$$\big(m_A+m_B\big)\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

autrement dit, le mouvement du centre de masse est un mouvement de translation rectiligne uniforme (si le référentiel est galiléen).

Nous procédons de même pour le mouvement relatif, considérons une particule, appelée *mobile fictif*, dont la position au cours du temps est $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Son accélération est $\mathbf{a}$. Il n'est alors pas difficile d'établir grâce au principe d'action réaction que :

$$\mu\mathbf{a} = \mathbf{F}_{A\to B}, \tag{5}$$

où $\mu = \dfrac{m_A m_B}{m_A+m_B}$ est appelée masse réduite du système.

L'intérêt principal de cette décomposition est que la force $\mathbf{F}_{A\to B}$ ne dépend typiquement que de $\mathbf{r}$, et non pas de $\mathbf{r}_A$ et $\mathbf{r}_B$ séparément. La dernière équation est donc une équation différentielle portant sur $\mathbf{r}$ seulement, et peut être résolue avec les méthodes habituelles.

Dans la plupart des cas simples décrits par ce formalisme, l'un des deux corps a une masse beaucoup plus importante que l'autre : c'est le cas des problèmes de planètes orbitant autour du Soleil, de la Lune autour de la Terre, d'un électron autour d'un noyau. Si nous posons $m_a \gg m_B$, alors $\mu \simeq m_B$. Autrement dit, le mouvement de A par rapport à B est très faible devant celui de B par rapport à A, car m_A étant grande, A a beaucoup d'inertie au mouvement. Si A peut être considéré comme quasi-fixe, alors le mouvement du mobile fictif est quasiment confondu avec le mouvement de B par rapport à A, ce qui correspond bien à $\mu \simeq m_B$.

2 Changements de référentiel

D'après ce qui précède, les lois de la physique s'écrivent de la même façon dans deux référentiels reliés par une translation rectiligne uniforme. Nous allons ici considérer deux référentiels reliés par une *isométrie* (une transformation qui préserve les longueurs) *directe* (qui transforme un trièdre direct de trois vecteurs en un autre trièdre direct de trois vecteurs). De telles transformations sont des composées de translations et de rotation.

Si le référentiel $\mathscr{R}'$ est animé d'un mouvement de *translation* de vecteur vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à $\mathscr{R}$, alors les formules de changement de référentiel donnent :

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ t' = t \end{cases}. \tag{6}$$

Considérons à présent un mouvement de rotation. Celui-ci est décrit par un vecteur Ω, dont la direction est l'axe de rotation, et la composante dans cette direction la vitesse angulaire de la rotation. Soit une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ du référentiel en rotation $\mathscr{R}'$. Comme la rotation dépend du temps, les vecteurs $\mathbf{e}_i$ en dépendent aussi. Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont normés, par conséquent,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,\mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = 0. \tag{7}$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont donc orthogonaux à leurs dérivées. Il est alors possible d'écrire $\dfrac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \alpha_j \cdot \mathbf{e}_j + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k$. De plus,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = 0. \tag{8}$$

En combinant ces équations, nous obtenons :

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \wedge \mathbf{e}_i. \tag{9}$$

Enfin, en décomposant les vecteurs $\mathbf{v}$ et Ω dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, il apparaît que les α_i sont les composantes du vecteur Ω, et finalement,

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \Omega \wedge \mathbf{r} \\ t' = t \end{cases}. \tag{10}$$

Nous pouvons alors reproduire ce raisonnement pour l'accélération. À chaque fois, la dérivée par rapport au temps fera intervenir un terme de type translation, où la composante du vecteur est dérivée par rapport au temps, et un terme de type rotation qui fait intervenir un produit vectoriel avec Ω. Finalement, pour un référentiel animé d'un mouvement de translation à la vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à $\mathscr{R}$, et d'un mouvement de rotation de vecteur Ω, l'accélération s'écrit :

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \wedge \mathbf{u} - \Omega \wedge \Omega \wedge \mathbf{r} - 2\Omega \wedge \mathbf{u}. \tag{11}$$

⚠ Il est très important de bien préciser par rapport à quels référentiels sont définis $\mathbf{u}$ et Ω ! En effet, $\mathbf{u}_{\mathscr{R}' \to \mathscr{R}} = -\mathbf{u}_{\mathscr{R} \to \mathscr{R}'}$, et $\Omega_{\mathscr{R}' \to \mathscr{R}} = -\Omega_{\mathscr{R} \to \mathscr{R}'}$. Suivant les définitions choisies, le signe change !

Revenons-en à la formule de l'accélération. Les termes en rouge (deuxième, troisième et quatrième) constituent *l'accélération d'entrainement*, notée $\mathbf{a}_e$; le dernier terme (en bleu) est *l'accélération de Coriolis*, notée $\mathbf{a}_c$.

En résumé, dans un référentiel en rotation, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\mathbf{a} + m\mathbf{a}_e + m\mathbf{a}_c = \mathbf{F}. \tag{12}$$

Il est d'usage d'écrire les termes d'accélération d'entrainement et de Coriolis comme des forces, dans le membre de droite de l'équation, en appelant *force d'inertie d'entrainement* $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e$, et *force*

d'inertie de Coriolis le terme $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$. Le premier terme de la force d'entrainement est dû uniquement à la translation. Il ne contribue que si $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \neq 0$. Le second terme ne contribue que si la vitesse angulaire de rotation du référentiel non galiléen choisi dépend du temps. Le terme en $\Omega \wedge \Omega \wedge \mathbf{r}$ correspond à une force qui écarte la particule de l'origine ; ce terme porte le nom de *force centrifuge*.

En résumé, si l'on souhaite décrire un mouvement dans un référentiel non-galiléen (par exemple, un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen), le principe fondamental de la dynamique peut être appliqué, à condition d'ajouter les forces d'inerties d'entrainement et de Coriolis.

3 Aspects énergétiques

Le principe fondamental de la dynamique formule le problème sous forme vectorielle. Il existe une façon de traiter ce problème, de manière équivalente, à partir d'équations scalaires : c'est le but de l'approche énergétique en mécanique.

3.1 Théorème de l'énergie cinétique

L'approche énergétique, tout comme la mécanique de Lagrange, se base sur le fait que l'information « utile »sur le mouvement se trouve le long de la direction de celui-ci. Projetons donc le principe fondamental de la dynamique le long du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} &= m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right] \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{13}$$

soit, en intégrant le long d'un chemin γ entre t_0 et t_1,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right]dt &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}(t_1)^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}(t_0)^2 \\ &= \Delta E_c \\ &= \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt \\ &= \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= W_\gamma(\mathbf{F}), \end{aligned} \tag{14}$$

où nous avons introduit l'énergie cinétique E_c, et le travail W de la force $\mathbf{F}$ le long de l'arc γ de la trajectoire. Notons que les forces qui agissent perpendiculairement à la trajectoire sont telles que $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$, et par conséquent, leur travail est nul. Cela élimine des équations du mouvement la plupart des forces de contraintes.

De manière générale, le résultat précédent, connu sous le nom de *théorème de l'énergie cinétique*, peut s'écrire :

$$\boxed{\Delta E_c = W_\gamma(\mathbf{F})}, \tag{15}$$

où l'on prendra garde à bien évaluer la différence d'énergie cinétique et le travail des forces extérieures le long du même arc de trajectoire γ. Dans cette équation, $\mathbf{F}$ est le vecteur somme de toutes les forces extérieures appliquées sur le système.

Le théorème de l'énergie cinétique est équivalent au principe fondamental de la dynamique, et peut donc être appliqué en toute généralité. On y retrouve un esprit commun avec l'équation de Lagrange, car il s'agit de se focaliser sur ce qu'il se passe le long de la trajectoire suivie par le système. La différence entre les deux formalismes est que, pour le théorème de l'énergie cinétique, **v** est la vitesse réelle du système, et n'est pas indépendante, ni du temps, ni des coordonnées du point matériel ; alors que dans l'approche de Lagrange, nous construisons des fonctions des coordonnées et de leurs dérivées temporelles qui peuvent être évaluées a priori pour n'importe quelle valeur de ces variables, et utilisons l'étude de la variation de certaines fonctions de ces coordonnées pour en déduire la dynamique.

3.2 Cas des forces conservatives

Le plus souvent, les systèmes étudiés sont soumis à des forces qui conservent l'énergie. Nous appelons forces *conservatives* les forces pour lesquelles il existe un potentiel scalaire U tel que :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\big(U\big)\,. \tag{16}$$

Dans ce cas,

$$W_\gamma(\mathbf{F}) = \int_\gamma \Big[-\mathbf{grad}\big(U\big)\Big]\cdot d\mathbf{r} = -U(t_1) + U(t_0) = -\Delta U\,, \tag{17}$$

Soit finalement

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = 0}\,, \tag{18}$$

où E est l'énergie du système. Ainsi, pour un système pour lequel toutes les forces extérieures appliquées sont le gradient d'un potentiel scalaire, l'énergie totale E du système est conservée au cours du mouvement.

Questionnaire d'auto-évaluation

• Les équations de Lagrange contiennent :

☐ plus d'information que les lois de Newton
☐ la même information que les lois de Newton
☐ moins d'information que les lois de Newton
☐ ça dépend

• Les équations de Lagrange contiennent :

☐ plus d'équations que les lois de Newton
☐ le même nombre d'équations que les lois de Newton
☐ moins d'équations que les lois de Newton
☐ ça dépend

• La quantité d'accélération généralisée A_i est homogène à :

☐ une accélération
☐ une force
☐ une masse fois une accélération
☐ ça dépend

• L'énergie cinétique T est homogène à :

☐ une énergie
☐ une force
☐ une accélération
☐ ça dépend

• La force généralisée Q_i est homogène à :

☐ une énergie
☐ une force
☐ une accélération
☐ ça dépend

• Dans le modèle de Bohr, l'atome est modélisé par un noyau immobile autour duquel les électrons gravitent sur des orbites circulaires stables de rayons pré-définis. Afin d'étudier le mouvement d'un électron dans ce modèle, nous avons besoin de :

☐ une coordonnée généralisée
☐ deux coordonnées généralisées
☐ trois coordonnées généralisées
☐ l'information donnée par l'énoncé ne permet pas de conclure

• Considérons le problème du calcul de la déviation de la trajectoire d'une comète par le soleil. Afin d'étudier le mouvement de la comète dans ce problème, nous avons besoin de :

☐ une coordonnée généralisée
☐ deux coordonnées généralisées
☐ trois coordonnées généralisées
☐ l'information donnée par l'énoncé ne permet pas de conclure

• La relation $L = T - U$ est valable :

☐ tout le temps
☐ seulement si le système est conservatif
☐ seulement si le système est conservatif et U ne dépend que des q_i
☐ ça dépend

• La fonction de Lagrange L est unique :

☐ vrai
☐ faux
☐ ça dépend

• Soit $f(\theta, \mathring{\theta}, \phi, \mathring{\phi}, t) = \mathring{\theta}^2 + 2\mathring{\phi}\,\mathring{\theta}$.

⋆ $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} =$

⋆ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathring{\theta}} =$

⋆ $\dfrac{\partial f}{\partial \phi} =$

⋆ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathring{\phi}} =$

⋆ $\dfrac{\partial f}{\partial t} =$

⋆ $\dfrac{df}{dt} =$

Questionnaire d'auto-évaluation

• D'après le théorème de Noether :

☐ les symétries de la fonction de Lagrange correspondent à des quantités conservées dans le mouvement du système
☐ les symétries du mouvement du système sont reliés à des quantités conservées dans la fonction de Lagrange
☐ les deux réponses ci-dessus sont correctes
☐ aucune des réponses ci-dessus ne sont correctes

• Une variable *cyclique* est une variable :

☐ qui oscille avec une période de 2π
☐ qui oscille avec une période dépendant des paramètres du problème
☐ qui n'apparait pas dans le lagrangien
☐ dont le module est constant

• Si le lagrangien est invariant par translation dans la direction q_i, quelle quantité est conservée ?

☐ l'impulsion totale
☐ la quantité de mouvement dans la direction de q_i
☐ l'énergie
☐ le moment cinétique dans la direction de q_i

• Si le lagrangien est invariant par rotation sur l'angle ϕ_i, quelle quantité est conservée ?

☐ l'impulsion totale
☐ la quantité de mouvement dans la direction de q_i
☐ l'énergie
☐ le moment cinétique le long de l'axe de rotation définissant ϕ_i

• Si le lagrangien est invariant par translation dans le temps, quelle quantité est conservée ?

☐ l'impulsion totale
☐ la quantité de mouvement dans le sens de l'axe du temps
☐ l'énergie
☐ le moment cinétique total

• Dans le problème de Kepler, combien d'intégrales premières du mouvement sont extraites des symétries du lagrangien :

☐ une intégrale première
☐ deux intégrales premières
☐ trois intégrales premières
☐ l'information donnée par l'énoncé ne permet pas de conclure

• Dans le problème de Kepler, les états liés ont une énergie négative :

☐ vrai
☐ faux

• Au voisinage d'un point d'équilibre, le mouvement peut être :

☐ stable
☐ instable
☐ l'un ou l'autre
☐ ni l'un ni l'autre

• Près d'un minimum de l'énergie potentielle, le mouvement est stable :

☐ vrai
☐ faux
☐ ça dépend

• Dans un problème à plus de deux variables, au voisinage d'un point d'équilibre, le mouvement peut être :

☐ stable
☐ instable
☐ l'un ou l'autre
☐ ni l'un ni l'autre
☐ aucune des réponses ci-dessus n'est satisfaisante

Questionnaire d'auto-évaluation

• D'après le principe de Fermat, la trajectoire d'un rayon lumineux rend le temps de parcours :

☐ minimal
☐ maximal
☐ extrémal
☐ stationnaire

• D'après le principe de Gauss, l'écart de la trajectoire au mouvement rectiligne uniforme est :

☐ minimal
☐ maximal
☐ extrémal
☐ stationnaire

• D'après le principe de Hamilton, la trajectoire physique rend l'action :

☐ minimale
☐ maximale
☐ extrémale
☐ stationnaire

• Les équations du mouvement obtenues en mécanique lagrangienne sont les mêmes que celles obtenues avec le principe de Hamilton ?

☐ Vrai
☐ Faux

• Le pendule simple a pour équation du mouvement une équation harmonique ?

☐ Vrai
☐ Faux

• Il est possible de construire le lagrangien en ne connaissant que les symétries du système :

☐ Vrai
☐ Faux

• Le théorème de Noether se dérive également du principe de Hamilton :

☐ Vrai
☐ Faux

• Il est possible de tirer de l'information d'une transformation du lagrangien qui laisse l'action stationnaire mais ne laisse pas le lagrangien invariant :

☐ Vrai
☐ Faux

• L'invariance de jauge électromagnétique est liée à la conservation de la charge :

☐ Vrai
☐ Faux
☐ ça dépend

• Pourquoi passe-t-on à la limite continue dans la description des vibrations d'un solide (à une dimension) :

☐ les équations portent sur des variables continues
☐ les équations portent sur une infinité de variables couplées
☐ ce n'est en fait absolument pas nécessaire, il s'agit d'une simple convention
☐ la matrice du système d'équations du mouvement est inversible
☐ aucune des réponses ci-dessus n'est satisfaisante

• Au voisinage d'un point d'équilibre stable, l'énergie potentielle est :

☐ quelconque
☐ linéaire
☐ harmonique
☐ cubique
☐ patatoïdale
☐ impossible de répondre, cela n'a pas été répété assez de fois en cours
☐ je ne sais pas, je compte demander au père noël

Questionnaire d'auto-évaluation

• La fonction de Hamilton contient :

- ☐ plus d'information que la fonction de Lagrange
- ☐ moins d'information que la fonction de Lagrange
- ☐ la même information que la fonction de Lagrange
- ☐ les deux fonctions ne sont pas comparables

• Dans le formalisme de Hamilton, un couple de variables correspondant à une coordonnée généralisée q est :

- ☐ $\left(q, p = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}(q, \mathring{q}, t)\right)$
- ☐ $\left(q, p = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}(q, \mathring{q}(q, p, t), t)\right)$
- ☐ $\left(q, p = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\left(q, \mathring{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, t\right)\right)$
- ☐ $(q, \mathring{q}, t)$

• Si un système est décrit par n équations d'Euler-Lagrange, il est décrit dans le formalisme de Hamilton par :

- ☐ n équations différentielles couplées d'ordre 2
- ☐ n équations différentielles d'ordre 1 et n équations différentielles d'ordre 2 couplées
- ☐ $2n$ équations différentielles d'ordre 1 couplées
- ☐ aucune des réponses ci-dessus

• Si q_i est cyclique dans le formalisme de Lagrange, alors elle est également cyclique dans le formalisme de Hamilton.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

• Si p_i est cyclique dans la fonction de Hamilton, alors q_i est conservée.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

• La fonction de Hamilton n'a pas de dépendance explicite en temps (i.e. sa dérivée *partielle* par rapport à t s'annule) si et seulement si la fonction de Lagrange correspondante n'a pas de dépendance explicite en temps.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

• La fonction de Hamilton est *toujours* égale à l'énergie du système.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

• Si le système n'est pas conservatif, l'énergie apportée ou dissipée par le système se déduit de la dérivée partielle de $\mathcal{H}$ par rapport au temps.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux
- ☐ Vrai seulement si q et p sont évalués le long de la trajectoire du système
- ☐ Cela dépend, l'information donnée n'est pas suffisante

• L'évolution de n'importe quelle observable au cours du temps peut être calculée à partir du crochet de Poisson de l'observable avec la fonction de Hamilton.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux
- ☐ Ça dépend

• $\{A, B\} = \{B, A\}$ (**attention** : il s'agit de crochets de Poisson, non pas d'anti-commutateurs).

☐ Vrai
☐ Faux

• L'écriture de l'évolution temporelle d'un observable dans le formalisme de Hamilton permet une généralisation simple d'un problème classique donné à son équivalent quantique.

☐ Vrai
☐ Faux

TD1 : Mécanique lagrangienne

Exercice 1 : Équations du mouvement pour une particule

Considérons une particule soumise à une force $\vec{F}$. Montrer que les équations du mouvement dans le formalisme de Lagrange sont équivalentes à celles de la mécanique de Newton :

1) en coordonnées cartésiennes.
2) pour une trajectoire plane en coordonnées polaires.

Exercice 2 : Machine de Atwood

Considérons une poulie, supposée parfaite (sans frottements et sans masse) sur laquelle est placée une corde de longueur l. Du côté gauche de la corde est suspendue une masse M_1, du côté droit une masse M_2.

1) Donner une fonction de Lagrange adaptée à ce problème.
2) Établir les équations du mouvement. Que remarque-t-on ?

Exercice 3 : Mouvements de billes et autres objets glissants

1) Considérons une bille, astreinte à se déplacer sans frottements le long d'une tige en rotation autour de l'axe (Oz), perpendiculaire à cette dernière. La vitesse de rotation est supposée constante.

   (a) Établir l'expression de l'énergie cinétique T de la bille en termes de coordonnées généralisées judicieusement choisies.

   (b) En déduire l'équation du mouvement de la bille.

   (c) Résoudre cette équation. Interpréter.

2) Un cylindre du rayon R, de masse M, et de moment d'inertie I autour de son axe, roule sans glisser sur un plateau. Ce plateau est animé d'un mouvement de translation perpendiculaire à l'axe du cylindre avec une loi $d(t)$ fixée.

   (a) Posons comme coordonnée généralisée l'angle θ que décrit un point quelconque du cylindre avec l'horizontale. Cette coordonnée est-elle suffisante pour décrire le problème ?

   (b) En déduire la quantité d'accélération généralisée correspondante. Quelle est l'accélération réelle au centre du cylindre ?

   (c) Reprendre le problème en choisissant pour coordonnée x, la position du centre du cylindre.

   (d) Comparer les deux équations du mouvement obtenues.

3) Un coin, d'angle au sommet α et de masse M peut glisser sans frottements sur une table horizontale. D'autre part, une masse ponctuelle m peut glisser sans frottements sur le coin.

   (a) Établir les équations du mouvement pour la position x d'un point quelconque du coin.

   (b) À quelle équation du mouvement obéit la position relative s de la masse m sur le coin ?

Exercice 4 : Traitement d'un potentiel dépendant de la vitesse – Force de Lorentz

Dans le cours, les équations de Lagrange sont étudiées pour des potentiels dépendant uniquement des coordonnées généralisées q_i, et non pas de leurs dérivées $\mathring{q}_i$. Il existe cependant des cas courant en mécanique pour lesquels cette relation n'est pas vérifiée. Dans cet exercice, nous nous focalisons sur le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, qui subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\big[\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B})\big] \,. \tag{1}$$

Pour cette force, à cause de la contribution magnétique, il n'est pas possible de se ramener à un potentiel indépendant de $\vec{v}$.

1) Rappeler la relation entre $\vec{E}$, $\vec{B}$, et les potentiels électromagnétiques appropriés.

2) Par symétrie avec la quantité d'accélération généralisée, examinons la construction suivante de la force généralisée pour un potentiel dépendant d'une coordonnée et de sa dérivée :

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \mathring{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \,. \tag{2}$$

   Vérifier que la fonction :

$$U = q\,\phi - q\,\vec{A}\cdot\vec{v} \,, \tag{3}$$

   permet de retrouver les équations du mouvement habituelles.

3) Les fonctions ϕ et $\vec{A}$ sont-elles uniques ? Vérifier que la symétrie d'invariance de jauge est préservée dans cette expression de la fonction de Lagrange.

Exercice 5 : Traitement d'une force non conservative : le frottement visqueux

Une autre force récurrente dans les problèmes de mécanique, et qui ne respecte pas le cadre fixé dans le cours est la force de frottement visqueux :

$$\vec{f} = -\sum_{i=1}^{3} k_i\, v_i\, \vec{e}_i \,, \tag{4}$$

où nous avons généralisé la forme plus conventionnelle $\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}$.

Cette force n'est pas conservative. Cependant, il est possible de la relier à une fonction $\mathcal{F}$, appelée fonction de dissipation de Rayleigh, définie par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} k_i \, v_i^2 \, . \tag{5}$$

1) Exprimer $\vec{f}$ en fonction de $\mathcal{F}$. Que remarque-t-on ?
2) Calculer le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ sur un trajet $\delta\vec{r}$. En déduire une interprétation physique de la fonction de Rayleigh.
3) En appliquant la formule habituelle définissant la force généralisée Q_j pour la force $\vec{f}$, relier Q_j à $\mathcal{F}$.

   Indice : il est conseillé d'utiliser les formules reliant les dérivées partielles du vecteur vitesse et celles du vecteur position.
4) En déduire la forme de l'équation de Lagrange en présence de forces dissipatives de type frottement visqueux.

Exercice 6 : Calcul d'une force de réaction par le principe des travaux virtuels

Dans le cours, le formalisme de Lagrange a été introduit comme une façon de se débarrasser des forces de contraintes. En utilisant le principe des travaux virtuels cependant, il est possible de calculer les valeurs de telles force. Cet exercice fournit un exemple d'un tel calcul.

Soit une perle M astreinte à se déplacer sur un cerceau de centre O et de rayon R en rotation autour de l'axe (Oz). La perle glisse sans frottements sur le cerceau. L'angle ϕ que fait le cerceau avec le plan (xOz) varie avec le temps suivant une loi fixée par un opérateur extérieur $\phi(t)$.

1) Faire un choix judicieux de coordonnée(s) généralisée(s).
2) Donner l'expression de l'énergie cinétique.
3) Donner l'expression de(s) force(s) généralisée(s).
4) En déduire la forme de l'équation de Lagrange correspondante.
5) Afin de déterminer la valeur de la force de réaction du cerceau sur la perle dans la direction $\vec{e}_\phi$, il faut la faire travailler. Pour cela, nous allons introduire ϕ comme une nouvelle coordonnée généralisée, et examiner un déplacement virtuel $\delta\phi$. En utilisant le principe des travaux virtuels, identifiez la force qui travaille lors de ce déplacement virtuel. Cette force comporte deux termes. Identifiez les.

TD2 : Symétries et lois de conservation

Exercice 1 : Symétries des champs de force et quantités conservées

Trouvez les quantités conservées pour des particules en mouvement dans des champs de force définis par des distributions uniformes et constantes réparties sur :

1) le plan $\big(xOy\big)$.
2) un cylindre infini d'axe $\big(Oz\big)$.
3) un prisme infini d'axe $\big(Oz\big)$ dont la base est un polygone.
4) deux points de coordonnées $(-x_0, 0, 0)$ et $(x_0, 0, 0)$.
5) le demi-plan infini $\big(x^+Oz\big)$.
6) un cône d'axe $\big(Oy\big)$.
7) un tore d'axe $\big(Oz\big)$.
8) une hélice cylindrique infinie d'axe $\big(Oz\big)$.

Exercice 2 : Traversée d'une interface entre deux zones de potentiel constant

Une particule de masse m et de vitesse $\mathbf{v}_1$ se déplace dans un demi-espace dans lequel l'énergie potentielle, constante, prend la valeur U_1. Elle arrive à l'interface avec le second demi-espace dans lequel l'énergie potentielle, constante également, prend la valeur U_2.

1) En analysant les symétries du problème, trouver les intégrales premières du mouvement.
2) Si θ_1 est l'angle entre la trajectoire de la particule et la normale à l'interface dans la zone 1, et θ_2 son équivalent dans la zone 2, trouvez la relation entre θ_1 et θ_2 en fonction des données du problème.

Exercice 3 : Symétries sous l'action des dilatations

Dans cet exercice, nous considèrerons que tous les q_i sont homogènes à des longueurs. Nous supposons que l'énergie potentielle $U(q)$ est telle que sa transformation sous l'action des dilatations de l'espace est :

$$U\big(\alpha\, q_1, ..., \alpha\, q_n\big) = \alpha^k U\big(q_1, ..., q_n\big)\,. \tag{1}$$

U est alors dite *homogène de degré* k. Nous appellerons β le facteur de dilatation du temps correspondant.

1) Sous l'effet des dilatations, comment se transforme $\mathbf{v}$? T ? En déduire $\beta(\alpha, k)$.
2) Quel est l'effet des dilatations sur l'équation du mouvement ?
3) Si le champ $U(q)$ est le champ de gravitation terrestre ressenti à notre échelle, que vaut k ? En déduire la relation entre le temps et l'espace. Ce résultat vous paraît-il cohérent ?

4) Si $U(q)$ est le potentiel de la loi de gravitation universelle, que vaut k ? Comment interpréter ce résultat ?

5) Répondre à la même question pour le potentiel associé à la loi de Hooke.

6) La moyenne temporelle d'une grandeur physique est définie par la relation suivante :

$$\overline{f} = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \,. \tag{2}$$

Que dire de $\overline{f}$ si $f(t)$ admet une primitive bornée ?

7) Exprimer T en fonction de $\mathring{p}_i$.

8) Considérons un mouvement confiné à une région finie de l'espace. Montrer que :

$$2\,\overline{T} = \overline{\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial U}{\partial q_i}} \,. \tag{3}$$

9) Soit U homogène de degré k. Simplifier la relation précédente et exprimer $\overline{T}$ et $\overline{U}$ séparément en fonction des caractéristiques du système.

10) Appliquer la relation précédente aux potentiels étudiés précédemment : pesanteur, gravitation, loi de Hooke.

Exercice 4 : Vibration de la molécule de CO_2

La molécule de CO_2 est modélisée par un atome de carbone, de masse M, et deux atomes d'oxygène, de masse m. Le problème est décrit par les trois coordonnées x_i représentant l'écart de chaque atome à sa position d'équilibre. Le centre de masse du système est considéré comme étant au repos à l'instant initial dans le référentiel choisi.

1) Les liaisons covalentes C–O sont représentées par des ressorts de raideur k. Justifier cette approximation.

2) Écrire un lagrangien pour ce système.

3) En déduire les équations du mouvement. On posera $\Omega^2 = k/m$ et $r = M/m$.

4) Chercher les pulsations propres et les modes propres associés.

5) Le mode $\omega = 0$ est appelé « mode mou ». Interpréter le mouvement correspondant. Quelle quantité est conservée dans ce mouvement ?

6) Interpréter de même les autres modes propres du système.

Bilan des compétences exigibles

Introduction à la mécanique analytique (2023)

★ **Cours n°1 :** Mécanique lagrangienne :

- ☐ Savoir proposer un jeu de coordonnées généralisées adaptées à la description d'un problème physique simple.
- ☐ En fonction de ces coordonnées, savoir exprimer la position, la vitesse et l'énergie cinétique d'une particule.
- ☐ Connaître la définition de la quantité d'accélération généralisée. Savoir la calculer sur un exemple simple.
- ☐ Connaître la définition de la quantité de force généralisée. Savoir la calculer sur un exemple simple.
- ☐ Connaître la relation entre quantités d'accélération et de force généralisées. Connaître l'équation de Lagrange, et savoir l'écrire sur un exemple simple. Les généralisations abordées dans les trois derniers exercices de la première feuille de TD ne sont pas exigibles. Si un tel exemple venait à être traité, le problème serait fortement guidé, et toutes les formules absentes du cours rappelées.
- ☐ Savoir écrire le lagrangien d'un système conservatif simple. Savoir que cette fonction n'est pas unique.

★ **Cours n°2 :** Symétries et lois de conservation :

- ☐ Connaître les relations entre symétries du lagrangien et lois de conservation. Seules seront exigées par cœur celles qui sont énoncées dans le cours. *En étant guidé*, savoir déterminer si une transformation est une symétrie du lagrangien, et, toujours avec de l'aide, identifier la quantité conservée correspondante.
- ☐ Savoir énoncer le théorème de Noether. Son application sans aide n'est pas exigée.
- ☐ Étant donnée une situation physique simple, savoir identifier des symétries du mouvement et en déduire des propriétés du lagrangien (seules les symétries explicitement traitées dans le cours sont exigibles).
- ☐ *En étant guidé*, savoir simplifier un problème en identifiant des intégrales premières du mouvement grâce aux symétries.
- ☐ Pour le problème de Kepler, savoir que les états liés ont une énergie négative. Connaître les trois types de trajectoire possibles. *En étant guidé*, savoir déterminer à partir d'un profil énergétique (valeur de l'énergie potentielle ou d'une énergie potentielle effective) si un système est dans un état libre ou lié. La démonstration des propriétés du mouvement et des équations des trajectoires n'est pas exigible (si un calcul de trajectoire est abordé, celui-ci sera plus simple, et entièrement guidé).

- ☐ **Savoir qu'au voisinage d'un point d'équilibre stable, le potentiel est harmonique.** Savoir trouver les points d'équilibre à partir d'un profil d'énergie potentielle donné. Savoir effectuer un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage d'un point d'équilibre et en déduire si l'équilibre est stable ou instable, pour un problème à une dimension.
- ☐ Pour un problème à deux ou trois dimensions, *en étant guidé*, savoir effectuer un développement au voisinage d'un point d'équilibre. La diagonalisation du problème pour trouver les directions d'équilibre ne sera pas effectuée sans aide. En revanche, il est demandé de savoir identifier les directions stables et instables à partir du signe des valeurs propres de la matrice.

★ **Cours n°3 :** Le principe de Hamilton :

- ☐ Connaître le principe de Hamilton. Être capable d'expliquer la différence entre principe de moindre action et principe d'action stationnaire.
- ☐ Connaître les équations d'Euler-Lagrange. Savoir les appliquer à des cas simples.
- ☐ *En étant guidé*, savoir appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange sur des cas simples.
- ☐ *En étant guidé, et en plusieurs étapes*, savoir passer d'une description détaillée de systèmes couplés à un système unique par passage à la limite continue. Savoir écrire les équations d'Euler-Lagrange pour la densité de lagrangien ainsi obtenue. La dérivation de l'équation d'onde correspondante n'est pas exigée.
- ☐ Savoir reconnaître les propriétés de base d'une équation d'onde : admet-elle des solutions propagatives ? Est-elle linéaire ? La résolution de telles équations sans aide détaillée n'est pas exigée.
- ☐ Savoir identifier les propriétés de base d'un mode de vibration : *en étant guidé* obtenir sa fréquence, savoir interpréter la forme des ondes obtenues en fonction des amplitudes des modes de vibration (vibration en phase, en opposition de phase, avec une amplitude similaire/dissimilaire).

★ **Cours n°4 :** Mécanique hamiltonnienne :

- ☐ Connaître la définition de la fonction de Hamilton. Savoir transformer un lagrangien en hamiltonien et vice et versa.
- ☐ Connaître la définition du crochet de Poisson. Connaître l'équation d'évolution d'une observable en termes de crochets de Poisson. La résolution explicite d'une telle équation n'est pas exigée.
- ☐ Connaître le lien entre fonction de Hamilton et énergie d'un système.
- ☐ Connaître les équations du mouvement en termes de fonction de Hamilton. *En étant guidé*, savoir trouver les équations du mouvement d'un système simple.
- ☐ Connaître les liens entre symétries de la fonction de Hamilton et intégrales premières du mouvement. Seuls les cas explicitement traités en cours sont exigés.

Examen blanc : Introduction à la mécanique analytique

Date de rendu : 05/12/2023

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

Questions de cours (8 points) :

- Donner la relation entre la quantité d'accélération généralisée A_i et l'énergie cinétique T du système.
- Donner la relation entre la quantité de force généralisée Q_i et les caractéristiques du mouvement (vecteur position, force appliquée, coordonnée généralisée q_i).
- Donner la relation entre A_i et Q_i.
- Si $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$, quelle quantité est-elle conservée ?
- Si $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ (ϕ étant un angle), quelle quantité est-elle conservée (*soyez précis*) ?

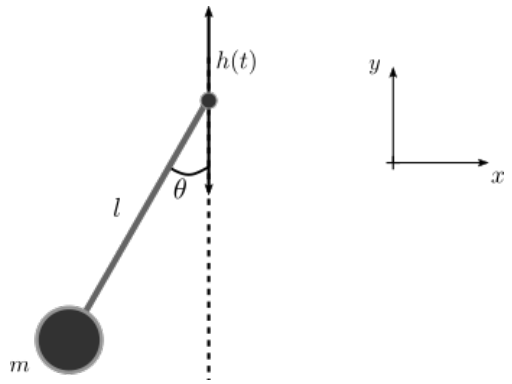
Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes (aucune justification n'est demandée) :

1) La fonction de Lagrange L est unique.
2) Si l'énergie cinétique du système est T, son énergie potentielle U, et que le système est conservatif, alors $L = T - U$.
3) L'équation du mouvement de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\right] - \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}} = 0\,. \tag{1}$$

Exercice d'application (4 points) :

Considérons un pendule dont le point d'attache suit un mouvement vertical sinusoïdal, donné par la loi $h(t) = h_0 \cos(\gamma t)$ fixée par l'expérimentateur.



1) Faire un choix approprié de coordonnée(s) généralisée(s).
2) Écrire le vecteur vitesse de la masse m (on pourra commencer par écrire son vecteur position, puis le dériver). En déduire l'expression de l'énergie cinétique T.
3) Écrire une fonction de Lagrange adaptée pour ce système.

Problème (8 points) : Vibration d'une molécule de dioxygène

Une molécule de dioxygène est composée de deux atomes d'oxygène reliés par une liaison covalente double.

1) La liaison covalente double est modélisée par un ressort de raideur k, associé à une énergie potentielle élastique. Justifiez cette approximation.
2) Faire un choix de coordonnées généralisées adaptées à la description du problème.
3) Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système.
4) Le système est-il conservatif ? En déduire que le lagrangien du système peut se mettre sous la forme :
$$L\big(x_1, x_2, \mathring{x}_1, \mathring{x}_2, t\big) = \frac{1}{2} m\, \mathring{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\, \mathring{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1 - x_2\right)^2 . \tag{2}$$
Ce résultat pourra être utilisé tel quel dans la suite du problème.
5) En déduire les équations du mouvement.
6) Supposons que les deux coordonnées suivent un mouvement périodique au cours du temps. En passant en notation complexe, il est alors possible d'écrire $x_j(t) = X_j\, e^{-i\omega t}$. Ré-écrire les équations du mouvement sous forme matricielle. On pourra poser $\Omega^2 = k/m$.
7) À quelle condition ce système admet-il une solution non triviale ? En déduire les deux fréquences propres de vibration de la molécule.
8) Interpréter les modes de vibration associés aux deux solutions précédentes.

Questions hors barème : (ne comptent pas dans les 1h30 de composition).

1) J'ai trouvé cette évaluation : trop facile, facile, ni facile ni difficile, difficile, trop difficile.
2) J'ai trouvé cette évaluation : trop courte, assez courte, de longueur adaptée, assez longue, trop longue.

Introduction à la mécanique analytique

Examen session 1 : 20/12/2023

Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

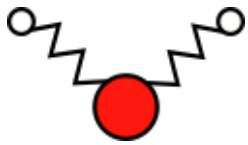
Un formulaire présent à la fin du sujet vous donne les valeurs numériques nécessaires pour résoudre les exercices.

Questions de cours (8 points) :

- Énoncer le principe de Hamilton (une phrase suffit).
- Exprimer l'impulsion p_i en fonction de L.
- Donner l'équation d'Euler-Lagrange pour une coordonnée généralisée q_i.
- Si $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, quelle quantité est-elle conservée (soyez précis) ?
- Donner la définition d'une coordonnée cyclique.
- Si q_i est cyclique, que peut-on en conclure ?
- Répondez par vrai ou faux à l'affirmation suivante : « Le nombre d'équations du mouvement en mécanique lagrangienne est inférieur ou égal à celui obtenu en mécanique newtonienne ».

Exercice d'application (4 points) :

Considérons une molécule d'eau comprenant un atome d'oxygène, et deux atomes d'hydrogène. Les deux liaisons O–H font un angle de 120° l'une avec l'autre.



1) Il vous est proposé d'étudier les vibrations de la molécule dans un modèle reposant sur deux hypothèses : le potentiel d'interaction O–H est harmonique, de raideur k, (ii) l'oxygène est immobile. Justifiez ces deux approximations.
2) Combien de degrés de liberté ce système a-t-il ? Faire un choix approprié de coordonnées généralisées.
3) En déduire l'énergie cinétique du système.
4) Le système est-il conservatif ? En déduire que son lagrangien peut se mettre sous la forme suivante :

$$L\big(x_1, \mathring{x}_1, x_2, \mathring{x}_2, t\big) = \frac{1}{2} m_h \big(\mathring{x}_1^2 + \mathring{x}_2^2\big) - \frac{1}{2} k \big(x_1^2 + x_2^2\big) \tag{1}$$

Problème : Le modèle de Bohr

Attention : *Ce problème est long, il n'est pas attendu que vous le résolviez en entier. En plus des 8 points restants, les questions supplémentaires rapportent des points en bonus qui sortent du barème de notation. Des résultats intermédiaires sont donnés à intervalle régulier, et peuvent être utilisés directement sans démonstration. De la sorte, vous pouvez traiter les différentes parties de ce problème dans l'ordre qui vous convient le mieux. En revanche, il vous est demandé de préciser lisiblement quelle est la question que vous cherchez à résoudre.*

Dans un article de 1913 intitulé « *On the Constitution of Atoms and Molecules* », Niels Bohr propose un modèle visant à expliquer la position des raies d'absorption des atomes en fonction de leur constitution interne. Sans mécanique quantique, il a dû introduire des hypothèses particulières pour permettre à son modèle de marcher. Ce problème vise à vous faire étudier les propriétés de son modèle, ainsi que ses résultats. Les parties suivantes peuvent être traitées dans le désordre.

- Partie 1 : Mouvement dans un champ de force central

Considérons un noyau, de numéro atomique Z, ainsi que l'un de ses électrons. Dans la suite du problème, nous négligeons l'interaction coulombienne électron–électron.

1) Le noyau atomique est considéré immobile. Justifiez cette approximation (vous pouvez vous aider du formulaire en fin de sujet). Combien de degrés de liberté a le système ? Faire un choix approprié de coordonnées généralisées.
2) À partir des symétries du problème, déduire l'existence de deux quantités conservées que l'on explicitera.
3) Montrer que le lagrangien du système peut se mettre sous la forme :

$$L\big(r, \mathring{r}, \theta, \mathring{\theta}, t\big) = \frac{1}{2} m_e \mathring{r}^2 + \frac{1}{2} m_e r^2 \mathring{\theta}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2}$$

4) Déduire que l'énergie du système peut se mettre sous la forme $E = E_+ + U_{eff}(r)$, où E_+ est une quantité toujours positive. Montrer que $U_{eff}(r)$ peut s'écrire :

$$U_{eff}(r) = \frac{J_z^2}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{3}$$

où J_z est une constante dont on donnera la nature physique.

5) Tracer l'allure de la fonction $U_{eff}(r)$. À partir de cette courbe, démontrer que les états liés correspondent aux cas où l'énergie de l'électron est négative.

- Partie 2 : Simplification des orbites

Afin de simplifier le calcul, Bohr introduit l'hypothèse que les orbites électroniques dans les états liés sont circulaires. Comme nous le verrons, cette approximation impacte très peu les résultats finaux.

6) Considérons une trajectoire de rayon $r = r_0$ constant. Combien de degrés de liberté le système a-t-il ? En déduire la nouvelle équation du mouvement. Interpréter ce résultat. Il peut être judicieux d'introduire la pulsation de rotation ω.

7) Nous donnons le résultat suivant, démontré dans le cours sous le nom de théorème du viriel, qui permet de relier l'énergie cinétique moyenne $\overline{T}$ et l'énergie potentielle moyenne $\overline{U}$ lors du mouvement. Pour une force de type coulombienne, ce résultat s'écrit :

$$2\,\overline{T} = -\overline{U} \tag{4}$$

En déduire que l'énergie totale du système peut se mettre sous la forme :

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{1}{2} m_e r_0^2 \omega^2 \tag{5}$$

- <u>Partie 3 : L'hypothèse de Planck</u>

Afin de pouvoir obtenir des spectres d'absorption discrets, Bohr a dû rajouter une hypothèse à son modèle. Il reprit l'hypothèse de Max Planck selon laquelle un rayonnement électromagnétique d'énergie E peut être décomposé en un nombre discret de fois une énergie élémentaire correspondant à l'énergie d'un photon. En réalité, dans le modèle étudié, la quantité quantifiée est le moment cinétique le long de l'axe de rotation, qui devient $J_z = m\,\hbar$, avec m un nombre entier. D'après la formule Eq. (5), cela correspond à une énergie $E = m\,\hbar\omega/2$.
Du point de vue du modèle étudié, cela signifie que les électrons ne peuvent évoluer que sur un nombre **discret** d'orbites circulaires, telles que : (i) si un électron émet un rayonnement d'énergie $n\hbar\omega/2$, il effectue une transition vers la $n^{\text{ième}}$ orbite la plus proche du noyau en partant de son orbite actuelle ; (ii) si un électron absorbe un rayonnement électromagnétique, il ne peut le faire que par un nombre entier de fois $\hbar\omega/2$, où ω est la pulsation de son orbite. Dans ce cas, l'électron effectue un mouvement de n orbites vers l'extérieur. La situation est résumée sur la Figure 1.

8) Ce que Bohr ignorait (et vous aussi peut-être) est qu'une particule quantique soumise à un potentiel harmonique ne peut avoir comme énergie que des nombres de la forme $m\,\hbar\omega/2$. À partir de vos connaissances en mécanique (classique), pouvez-vous justifier a posteriori la règle de quantification choisie (autrement dit, sauriez-vous justifier pourquoi en première approximation, l'électron se comporte comme une particule dans un potentiel harmonique) ?

9) Considérons l'émission d'un rayonnement d'énergie $E = n\hbar\omega/2$ qui stabilise l'électron sur l'orbite la plus proche du noyau (orbite de numéro $n_1 = 1$). En utilisant les relations Eq. (5), montrer les relations suivantes :

$$r_1 = \frac{n^2\hbar^2}{2\,m_e}\left(\frac{8\pi\varepsilon_0}{Ze^2}\right) \quad , \quad \omega_1 = \frac{8}{n^3\hbar^3}\left(\frac{m_e}{2}\right)\left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\right)^2 \tag{6}$$

On fera attention au signe de E dans les équations, suivant qu'il s'agit d'une énergie absorbée par l'électron ou rayonné par lui.

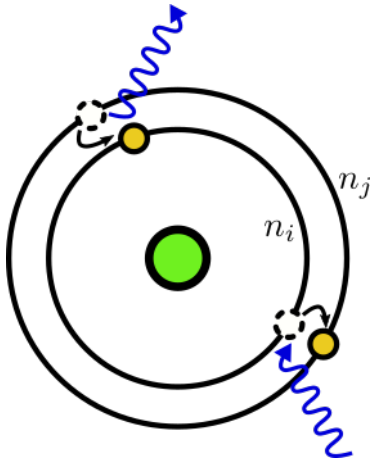


FIGURE 1 – Transitions dans le modèle de Bohr. Un électron qui absorbe un rayonnement de $n_j - n_i$ photons se décale de l'orbite n_i vers l'orbite n_j. Un électron qui rayonne $n_j - n_i$ photons effectue une transition de l'orbite n_j vers l'orbite n_i.

10) À partir des expressions précédentes, estimer la valeur de r_1 et de ω_1. En déduire la valeur de la longueur d'onde associée λ_1. Sachant que les premières raies d'absorption ont été identifiées dans le spectre visible, ces ordres de grandeurs sont-ils cohérents avec votre culture physique ?

- <u>Partie 4 : Application à la prédiction des raies d'absorption d'éléments légers</u>

11) À partir de l'expression de r dans Eq. (6), et de celle de l'énergie Eq. (5), en déduire que lors d'une transition d'un niveau n_i vers un niveau n_j, $\Delta E \propto \left(1/n_i^2 - 1/n_j^2\right)$ (explicitez le coefficient de proportionnalité).

12) En déduire que les longueurs d'ondes des raies d'absorption sont liées par la relation suivante :

$$\frac{1}{\lambda_{ij}} = R_H \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right) \tag{7}$$

Donner une estimation de R_H. Ce résultat vous paraît-il cohérent ? R_H est appelée constante de Rydberg.

13) Dans le formulaire en fin de sujet se trouvent les trois premières séries de raies d'absorption de l'hydrogène, et la première série de raies de l'hélium. Sachant que vous n'avez pas le droit à la calculatrice, une bonne âme a consciencieusement ajouté des séries de combinaisons de nombres qui semblent pertinentes pour l'étude des données expérimentales. Pour chaque série, donner (i) le type de rayonnement absorbé en fonction des longueurs d'ondes (visible, micro-ondes, ...), (ii) la nature des transitions correspondantes (par exemple, il s'agit d'une série de transitions des orbites $n \geqslant 7$ vers l'orbite $n = 7$).

14) Conclure quand à la précision du modèle de Bohr.

Formulaire :

- Masses atomiques (en unité de masse atomique u) :

  $m_H = 1.0\,u$
  $m_O = 16\,u$

- Constantes fondamentales de la physique :

  $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}
  $c = 2.998 \times 10^{8}$ m.s^{-1}
  $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg
  $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg
  $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s
  $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J.s

- Séries des raies de l'hydrogène :

  ⋆ Série de Lyman :

λ (nm)	$1/(\lambda R_H)$
121.57	0.7498
102.57	0.8887
97.254	0.9373
94.974	0.9598
93.780	0.9720

  ⋆ Série de Balmer :

λ (nm)	$1/(\lambda R_H)$
656.3	0.1389
486.1	0.1875
434.0	0.2100
410.2	0.2222
397.0	0.2296

  ⋆ Série de Paschen :

λ (nm)	$1/(\lambda R_H)$
1875	0.0486
1282	0.0711
1094	0.0833
1005	0.0907
954.6	0.0955

- <u>Séries des raies de l'hélium :</u>

  - ⋆ Série de Pickering :

λ (nm)	$1/\left(\lambda R_H\right)$
1012.4	0.0900
656.0	0.1389
541.2	0.1684
485.9	0.1876
454.1	0.2007
433.1	0.2100

- Quelques combinaisons de nombres :

n	$1-1/n^2$	$1/4-1/n^2$	$1/9-1/n^2$	$4\times\left(1/16-1/n^2\right)$
2	0.7500			
3	0.8889	0.1389		
4	0.9375	0.1875	0.0486	
5	0.9600	0.2100	0.0711	0.0900
6	0.9722	0.2222	0.0833	0.1389
7		0.2296	0.0907	0.1684
8			0.0955	0.1875
9				0.2006
10				0.2100

Introduction à la mécanique analytique

Examen session 2 : 10/01/2024

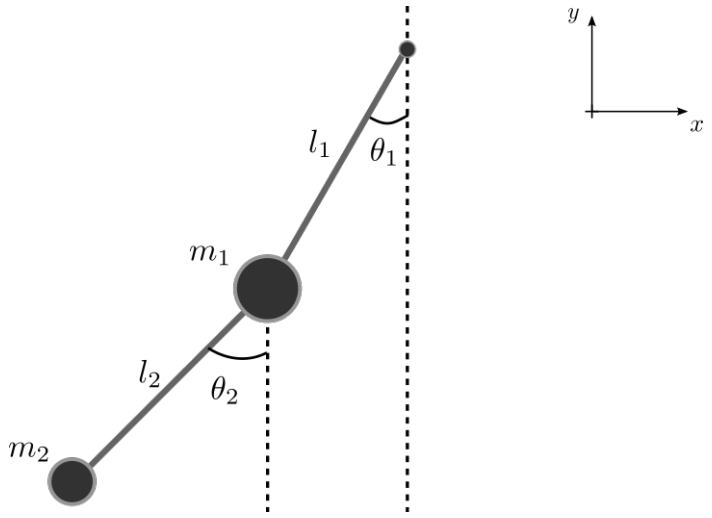
Calculatrices, documents et téléphones interdits — Durée : 1h30

Questions de cours (8 points) :

- Exprimez la quantité d'accélération généralisée A_i en fonction de la coordonnée q_i et de l'énergie cinétique T.
- Quelle transformation relie la fonction de Hamilton $\mathcal{H}(q, p, t)$ et la fonction de Lagrange $L(q, \mathring{q}, t)$?
- Énoncer les équations du mouvement en fonction de la fonction de Hamilton $\mathcal{H}$.
- Si p_i n'apparaît pas dans l'expression de $\mathcal{H}$, y a-t-il une quantité conservée ? Justifiez ce résultat grâce aux équations de Hamilton.
- Est-il vrai que le principe de Hamilton permet de traiter dans un même formalisme les ondes et les particules classiques ?
- Que peut-on dire de l'énergie potentielle d'un système au voisinage d'une position d'équilibre *stable* ?
- Répondez par vrai ou faux à l'affirmation suivante : « La fonction de Lagrange d'un système est unique ».
- Répondez par vrai ou faux à l'affirmation suivante : « Pour un système non conservatif, la fonction de Hamilton renseigne sur le taux de perte ou de gain d'énergie ».

Exercice d'application (4 points) : Le double pendule

Considérons un double pendule constitué de deux tiges mises bout à bout à l'extrémité desquelles sont suspendues deux masses m_1 et m_2 (la masse des tiges pourra être négligée tout au long de l'exercice). L'extrémité haute du pendule est fixe.



1) Combien de degrés de liberté ce système a-t-il ? Faire un choix approprié de coordonnées généralisées.
2) Écrire les vecteurs positions de chacune des deux masses. Pour la seconde masse, il pourra être utile d'utiliser la relation de Chasles afin de la décomposer en une partie qui est identique à la position de la première masse, et un second terme qui exprime la position relative de la seconde masse par rapport à la première.
3) En déduire que l'énergie cinétique du système se décompose en :

$$T_1\big(\theta_1, \mathring{\theta}_1, t\big) = \frac{1}{2} m_1\, l_1^2\, \mathring{\theta}_1^2$$

pour la première masse, et :

$$T_2\big(\theta_1, \theta_2, \mathring{\theta}_1, \mathring{\theta}_2, t\big) = \frac{1}{2} m_1\, l_1^2\, \mathring{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, l_2^2\, \mathring{\theta}_2^2 + m_2\, l_1\, l_2\, \mathring{\theta}_1\, \mathring{\theta}_2\, \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

pour la seconde. Ces résultats peuvent être utilisés sans démonstration dans la suite de l'exercice.

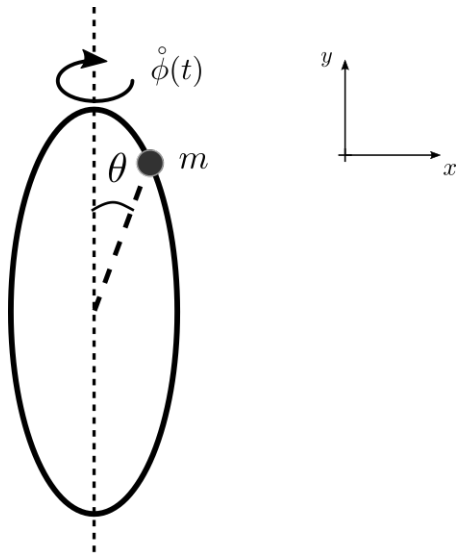
4) Donner une fonction de Lagrange correspondant à ce système.

Problème : Perle sur un cerceau en rotation

Attention : *Ce problème est long, il n'est pas attendu que vous le résolviez en entier. En plus des 8 points restants, les questions supplémentaires rapportent des points en bonus qui sortent du barème de notation. Des résultats intermédiaires sont donnés à intervalle régulier, et peuvent être utilisés directement sans démonstration. Il peut donc être intéressant de lire le sujet en entier pour déterminer les questions qui vous semblent les plus abordables avant de vous lancer dans sa*

résolution. De la sorte, vous pouvez traiter les différentes parties de ce problème dans l'ordre qui vous convient le mieux. En revanche, il vous est demandé de préciser lisiblement quelle est la question que vous cherchez à résoudre.

Considérons une perle astreinte à se déplacer le long d'un cerceau. Le cerceau est en rotation, avec une vitesse angulaire $\mathring{\phi}(t)$ fixée par l'expérimentateur. La perle a pour masse m, et le cerceau a pour rayon R.



Dans cet exercice, nous proposons l'étude des positions d'équilibre, stables et instables, de ce système, ainsi que les propriétés des petites variations autour de ces positions d'équilibre. Les parties suivantes peuvent être traitées dans le désordre.

- <u>Partie 1 : Préliminaires</u>

1) Combien de degrés de liberté le système a-t-il ? Faire un choix approprié de coordonnée(s) généralisée(s).
2) La fonction de Lagrange correspondant à ce système a été calculée dans le cours. Nous rappelons ici son expression :

$$L\big(\theta, \mathring{\theta}, t\big) = \frac{1}{2} m\, R^2 \big(\mathring{\theta}^2 + \mathring{\phi}(t)^2\, \sin^2(\theta)\big) - m\, g\, R\, \cos(\theta) \tag{1}$$

   Calculez l'impulsion p_θ associée à θ.
3) Calculez la fonction de Hamilton $\mathcal{H}$ correspondant à L.
4) Ce système est-il conservatif ? Si oui à quelle condition ? Justifiez.
5) La vitesse angulaire de rotation est supposée constante $\mathring{\phi}(t) = \omega$. En déduire l'existence d'une intégrale première du mouvement.
   <u>Indice :</u> On veillera à ce que le résultat de cette question soit cohérent avec le résultat de la question 4).

6) Déduire que l'énergie du système peut se mettre sous la forme $E = E_+ + V_\omega(\theta)$, où E_+ est une quantité toujours positive, et $V_\omega(\theta)$ est un potentiel effectif qui s'exprime sous la forme suivante :

$$V_\omega(\theta) = \frac{1}{2} m\, R^2 \left(2\,\omega_0^2 \cos(\theta) - \omega^2 \sin^2(\theta)\right) \tag{2}$$

où ω_0 est une constante dont on précisera la valeur et la nature physique (à quel type de quantité ω_0 est-elle homogène ?).

L'expression précédente de $V_\omega(\theta)$ peut-être utilisée telle qu'elle sans démonstration dans la suite du problème.

- <u>Partie 2 : Rotation rapide $\omega > \omega_0$</u>

7) Montrer que les points $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont deux positions d'équilibre instables.

8) Montrer l'existence de deux points d'équilibre stable en θ_s et $2\pi - \theta_s$. Exprimez $\cos(\theta_s)$ en fonction des données du problème.

9) À partir des informations sur les 4 positions d'équilibre, donner l'allure de $V_\omega(\theta)$ pour $\theta \in]-\pi; \pi]$.

10) Montrer qu'en ces positions d'équilibre stable, l'énergie s'écrit :

$$E_m = -\frac{1}{2} m\, R^2\, \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right) \tag{3}$$

11) Nous voulons maintenant étudier les oscillations autour de cette position d'équilibre. Pour cela, nous allons calculer $\Delta E = E(\theta_s + u) - E_m$, avec $u \ll \theta_s$. En vous basant sur vos connaissances sur le comportement d'un système au voisinage d'une position d'équilibre, déterminer l'ordre auquel doit se faire le développement limité donnant ΔE (le résultat doit être clairement justifié, une phrase suffit).

12) Effectuer le développement limité. En mettant la variation d'énergie sous la forme $\Delta E = \frac{1}{2} m\, R^2\, u^2\, \tilde{\omega}^2$, identifier la pulsation des petites oscillations $\tilde{\omega}$. Montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right) \tag{4}$$

<u>Bonus :</u> À partir de l'allure de $V_\omega(\theta)$ déterminée en 9) et de vos connaissances en mécanique, décrire qualitativement le comportement du système pour les trois domaines $E_m < E < -mgR$, $-mgR < E < mgR$ et $mgR < E$.

- Partie 3 : Rotation lente $0 < \omega < \omega_0$

13) Montrer que $\theta = 0$ est un point d'équilibre stable, et $\theta = \pi$ est un point d'équilibre instable.

14) Montrer qu'il n'existe pas d'autres positions d'équilibre.

15) À partir des informations précédentes, donner l'allure de $V_\omega(\theta)$ sur l'intervalle $\theta \in]-\pi;\pi]$.

16) En utilisant vos connaissances générales en mécanique, en déduire l'évolution qualitative du système dans les régimes $-mgR < E < mgR$ et $mgR < E$.

17) De même que pour la rotation rapide, nous nous intéressons aux oscillations au voisinage de l'équilibre stable. D'après vos connaissances en mécanique, à quel ordre devez-vous effectuer le développement limité de l'énergie ? Effectuez ce développement, et identifiez, de même qu'en 12) la pulsation correspondante.

- Partie 4 : Conclusion

Bonus : Tracer, en fonction de la vitesse de rotation ω l'évolution des angles θ donnant les positions d'équilibre stable et instable.