CT Ondes Electromagnétiques L3 PC

(Dated: 2024)

I. PROBLÈME 1: ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

Considérons une cavité optique constituée de deux miroirs parallèles, distants de d, orientés orthogonalement à la direction x. Le milieu entre les deux miroirs est assimilé à du vide. Une onde électromagnétique se propage dans la cavité dans la direction x.

1) Rappeler les équations de Maxwell pour une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique se propageant dans le vide.

2) En déduire l'état de polarisation de l'onde dans la cavité (n'oubliez pas de discuter de chacun des deux champs).

3) Les miroirs sont assimilables à des conducteurs parfaits. Quelle(s) condition(s) aux bords cela impose-t-il sur les champs dans la cavité ?

4) Que se passe-t-il lorsque l'onde rencontre le premier miroir ? Le second miroir ?

5) Écrire l'expression du champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité. Comment appelle-t-on une telle onde ?

6) Dessiner la cavité avec (i) la fonction d'enveloppe et (ii) la représentation du champ oscillant à deux instants différents pour les trois premiers modes d'oscillation du champ électrique à l'intérieur de la cavité. Pour des raisons de clarté, il vous est conseillé de produire trois dessins différents, un pour chacun des modes d'oscillation.

7) Question bonus : Application

   En réalité, les miroirs ne sont pas parfaits. Une faible part du champ dans la cavité est transmis à l'extérieur, tandis qu'une faible part d'un champ externe à la cavité peut entrer dans celle-ci.

   Dans un dispositif expérimental typique, la cavité est excitée de l'extérieur par un laser, appelé pompe, qui injecte de l'énergie dans la cavité, et le faisceau sortant de la cavité est exploité par la suite du dispositif expérimental. L'énergie injectée compense exactement l'énergie perdue par rayonnement de la cavité.

   À partir de votre analyse précédente, expliquer l'utilité d'un tel dispositif.

II. PROBLÈME 2 : PROPAGATION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE

Considérons une antenne, assimilée à une source ponctuelle de champ électromagnétique, située à une hauteur h du sol.

1) Faire une dessin représentant la situation.

2) En vous basant sur les symétries du problème, simplifier l'expression des champs électrique et magnétique.

3) L'onde est émise par l'antenne dans l'atmosphère, assimilée à du vide. À partir des équations de Maxwell, dériver les équations de propagation des champs électriques et magnétiques dans l'atmosphère.

4) En déduire que l'équation de propagation peut être simplifiée pour prendre la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}(r,t) + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(r,t) = 0$$

   Ce résultat pourra être utilisé sans démonstration dans la suite du problème.

   Indice : L'équation de propagation peut être simplifiée grâce au formulaire et au résultat de la question 2).

5) Résoudre l'équation de propagation. Comment appelle-t-on ce type d'ondes ?

6) Loin de sa source, l'onde est considérée comme plane. Arrivée à une altitude d'environ 50 km du sol, l'onde entre dans une couche de l'atmosphère appelée ionosphère. Dans cette région, les molécules de l'atmosphère se dissocient, et des ions et électrons se propagent librement. Un tel milieu est appelé *plasma*.

   Le plasma est assimilé à un milieu ohmique de conductivité σ. Écrire les équations de Maxwell dans le plasma.

7) En déduire la relation de dispersion dans ce milieu. On supposera $\sigma \geqslant 0$ Comment appelle-t-on ce type d'ondes ?

8) Sachant que l'ionosphère s'étend jusqu'à environ 965 km au dessus du niveau du sol, que se passe-t-il lorsque l'onde radio recontre cette couche ?

9) En réalité, la conductivité d'un plasma est une grandeur complexe. Par conséquent, celui-ci se comporte comme un filtre passe haut, coupant les fréquences inférieures à une fréquence de référence appelée *fréquence plasma*. Pour l'ionosphère, son ordre de grandeur est de 9 MHz. À quel domaine de fréquences cela correspond-il ?

10) Faire un schéma de la situation à l'échelle de la Terre. Conclure sur la possibilité de communiquer par ondes Radio entre Paris et Tokyo.

A. Formulaire

- Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\tan(\theta)}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

TD1 : Propagation dans le vide – Notions élémentaires

Exercice 1 : Équation d'onde à une dimension

Soit une onde φ à une dimension dont la propagation est donnée par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{1}$$

1) À l'aide du changement de variable suivant :

$$\big(x,t\big) \;\mapsto\; \big(u = x - c\,t\,,\; v = x + c\,t\big)$$

résoudre l'équation (1).

2) Soient t_1 et t_2 deux instants distincts. Pour chaque terme de la solution générale déterminée à la question précédente, que peut-on dire de leur valeur ? En déduire la justification du nom d'« *onde progressive* » donné à de telles fonctions.

3) Admettons que tout signal périodique se décompose de manière unique en une somme (éventuellement infinie) de sinus et de cosinus appelée *série de Fourier*. Peut-on réduire notre problème à l'étude de $\varphi(x,t) = X\cos(\alpha(x - c\,t))$ et $\psi(x,t) = X\cos(\alpha(x + c\,t))$ sans perte de généralité ?

4) Que peut-on dire de la fonction $\Phi(x,t) = \varphi(x,t) + \psi(x,t)$ vis-à-vis de l'équation (1) ?

5) En simplifiant l'expression de $\Phi(x,t)$, reprendre 2). Comment s'appelle une telle onde ? Justifier ce nom.

Exercice 2 : Ondes non périodiques — Transformation de Fourier

Soit $f(\mathbf{x},t)$ une fonction décroissant **suffisamment vite** (nous laissons volontairement cette notion définie de manière peu précise) en les deux infinis, à la fois pour $\mathbf{x}$ et pour t. La *transformée de Fourier* de f, notée $\tilde{f}(\mathbf{k},\omega)$, est définie par l'équation suivante :

$$f(\mathbf{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}(\mathbf{k},\omega)\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\,. \tag{2}$$

1) En utilisant la définition suivante de la fonction δ de Dirac :

$$\int dy\, e^{iy\,z} = 2\pi\delta(z) \tag{3}$$

vérifier que

$$\tilde{f}(\mathbf{k},\omega) = \int d^3x \int dt\, f(\mathbf{x},t)\, e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\,. \tag{4}$$

2) En interprétant l'intégrale dans Eq. (2) comme une somme infinie, il est donc possible de décrire tout signal comme la somme de composantes de Fourier ayant une valeur de ω et de $\mathbf{k}$ fixées. Justifier le nom d'ondes planes progressives monochromatiques donné à ces ondes.

3) Justifier l'utilisation d'ondes planes progressives monochromatiques pour la résolution de problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide.

4) Écrire les équations de Maxwell pour une onde plane progressive monochromatique dans le vide.

5) Soient $\mathcal{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, \omega)$ et $\mathcal{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{\mathbf{B}}(-\mathbf{k}, \omega)$. $\big(\mathcal{E}, \mathcal{B}\big)$ est-il une solution des équations de Maxwell ?

6) Que peut-on dire de la nature de l'onde $\big(\mathcal{E}, \mathcal{B}\big)$?

7) Écrire les équations de Maxwell pour $\big(\mathcal{E}, \mathcal{B}\big)$. Conclure.

Exercice 3 : Application – Modèle de l'électron élastiquement lié

Considérons un atome dans un champ électrique $\mathbf{E}$. Concentrons nous sur le mouvement d'un électron autour du noyau. Nous admettrons sans démonstration que les forces agissant sur l'électron sont les suivantes :

- La force de Lorentz $\mathbf{F}_L = -e\,\mathbf{E}$.
- La force de Coulomb $\mathbf{F}_C = -\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathbf{r}$, où R est le rayon de l'atome, et Z son nombre de protons.
- La force de frottement par rayonnement $\mathbf{F}_r = -\dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$.

1) Écrire l'équation du mouvement de l'électron dans ces conditions.

2) En admettant que dans le régime de longueurs d'ondes considérées, $d^3\mathbf{r}/dt^3 \simeq \omega_0^2 d\mathbf{r}/dt$, mettre l'équation précédente sous la forme générique suivante :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} \tag{5}$$

où ω_0 est la pulsation propre du système, et Q son facteur de qualité.

3) Résoudre l'équation précédente pour la position dans le cas d'un régime sinusoïdal forcé en utilisant la notation complexe.

4) Le vecteur polarisation associé à l'atome s'écrit $\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \alpha\,\mathbf{E}$. La partie réelle de α donne l'information sur la dispersion de l'onde électromagnétique incidente, tandis que sa partie imaginaire porte l'information sur son absorption.

5) Tracer la forme des solutions. On pourra poser $x = \omega/\omega_0$. Quel est le rôle du facteur de qualité ?

6) Application numérique : $e \simeq 1.6 \times 10^{-}19$ C, $\epsilon_0 \simeq 8.9 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}, $m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $R \simeq 1$ Å, $c \simeq 3.0 \times 10^8$ m·s^{-1}. Calculer Q . Conclure sur la pertinence du modèle de l'onde monochromatique dans le cas de rayonnement atomique.

7) À présent, nous allons nous intéresser aux propriétés de la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide émise par une source ponctuelle. En utilisant les symétries du problème, choisir un système de coordonnées adaptées à la description du problème. Que peut-on dire du champ électromagnétique émis dans ce système de coordonnées.

8) Dans ce système de coordonnées, l'équation de propagation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}(r,t) + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

où φ peut être identifié soit au champ électrique, soit au champ magnétique, dans leur direction de polarisation. Donner la solution générale de l'équation précédente. Il peut être intéressant de tirer avantage des résultats établis dans l'exercice 1.

9) En déduire la forme du vecteur de Poynting dans ce système de coordonnées. On admettra sans démonstration que les propriétés de polarisation démontrées dans l'exercice 2 pour la propagation des ondes électromagnétiques planes dans le vide restent valables.

10) Que vaut l'énergie portée par un plan d'onde de rayon r ? Justifier le nom d'ondes sphériques données à de telles ondes. Conclure sur la pertinence du modèle d'onde électromagnétique plane en fonction de la position de l'observateur relativement à la source du champ.

Exercice 4 : Propagation, sources, et degrés de liberté

• *Théorème de décomposition de Helmholtz (3 d) :* Tout champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}_d(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}_c(\mathbf{x},t) \\ &\mathbf{rot}\big(\mathbf{F}_d\big) = \mathbf{0} \\ &\mathrm{div}\big(\mathbf{F}_c\big) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Nous rappelons que $\mathbf{rot}\big(\mathbf{grad}(X)\big) = \mathbf{0}$, et $\mathrm{div}\big(\mathbf{rot}(\mathbf{X})\big) = 0$.

1) En appliquant le théorème de décomposition de Helmholtz au champ magnétique $\mathbf{B}$, en déduire l'existence d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$. Celui-ci est-il unique ? Sous quelle(s) condition(s) la réponse à la question précédente est-elle valable ?

2) Déduire des équations de Maxwell la décomposition de Helmholtz du champ électrique $\mathbf{E}$.

3) Soit la transformation :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \phi(\mathbf{x},t) - \dfrac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \mathbf{grad}\big(\chi(\mathbf{x},t)\big) \end{cases} \tag{8}$$

appelée *transformation de jauge* (χ est le *champ de jauge*). Quel est son effet sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$? Conclure.

4) Écrire les équations de Poisson pour $\big(\phi,\mathbf{A}\big)$. En déduire une condition de jauge judicieuse pour la propagation des **potentiels** électromagnétiques dans le vide.

5) Supposons à présent l'existence de sources de champs $\big(\rho(\mathbf{x},t),\mathbf{j}(\mathbf{x},t)\big)$. Quelle relation les lie ? À combien de variables indépendantes correspondent-elles donc ?

6) Ce comptage vous paraît-il cohérent avec l'étude de l'unicité des potentiels électromagnétiques ?

7) Combien de contraintes une équation du type $\mathrm{div}(\mathbf{X}) = S$ introduit elle ?

8) Même question pour $\mathbf{rot}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}$.

9) En séparant, dans les équations de Maxwell, les équations de structure des équations de lien champ-source, déduire le nombre de degrés de liberté indépendants du champ électromagnétique. Ce résultat vous paraît-il cohérent avec l'étude des sources et des potentiels ?

TD2 : Phénomènes de polarisation

Exercice 1 : Propagation d'une onde monochromatique dans le vide

Soit une onde électromagnétique monochromatique se propageant dans le vide.

1) Rappeler les équations de Maxwell pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique dans le vide.
2) En déduire l'agencement des vecteurs de polarisation de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.
3) Comment appelle-t-on ce type de polarisation ? Justifier graphiquement cette appellation.

4) Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sommes de deux ondes planes progressives monochromatiques de même longueur d'onde et contra-propageantes. Que se passe-t-il ?
5) Quelle est la polarisation de l'onde résultante ?
6) Les résultats précédents sont-ils conservés dans le cas du champ émis par une source atomique ponctuelle ? On pourra utiliser les formules suivantes valables en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\big(r^2\Phi_r\big)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial\big(\sin(\theta)\Phi_\theta\big)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial\varphi} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{\Phi}) = {} & \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\left(\frac{\partial\big(\sin(\theta)\Phi_\varphi\big)}{\partial\theta} - \frac{\partial\Phi_\theta}{\partial\varphi}\right)\cdot\mathbf{u}_r \\ & + \left(\frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\big(r\Phi_\varphi\big)}{\partial r}\right)\cdot\mathbf{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\big(r\,\Phi_\theta\big)}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_r}{\partial\theta}\right)\cdot\mathbf{u}_\varphi\end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 2 : Modificateurs de polarisation : matériaux bi-réfringents

Cet exercice présente plusieurs types de matériaux dits bi-réfringents, c'est à dire possédant un indice de réfraction dépendant de la direction dans laquelle ils sont observés. Typiquement, une direction possédant un indice plus grand est appelée *axe lent*, et une direction possédant un indice plus faible est appelée *axe rapide*. L'application des lois de l'électromagnétisme dans la matière dépassant le cadre de ce TD, nous considèrerons ces éléments comme des éléments plans, perpendiculaires à la direction de propagation, et positionnés de manière à ce que les axes lents et rapides soient orthogonaux à la direction de propagation.

• Partie 1 : Cas parfait : le polariseur

Un polariseur est un matériau bi-réfringent parfait, c'est à dire qu'il laisse intacte la composante du champ le long de son axe rapide, et annule la composante du champ dans la direction orthogonale. Dans la suite de l'exercice, nous utilisons la notation générique $\mathbf{\Phi}$ pour désigner $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$.

1) Le polariseur est incliné d'un angle θ par rapport à l'axe x, défini comme l'axe donnant la polarisation rectiligne d'un champ $\mathbf{\Phi}$ incident. Quelles sont les coordonnées de $\mathbf{\Phi}$ en sortie de polariseur ?

2) Quelle est l'état de polarisation de $\mathbf{\Phi}$ en sortie de polariseur ?

3) Sachant que, si $\mathbf{\Phi}$ est décrit en notation complexe, l'intensité lumineuse instantanée est donnée par : $I \propto \left|\mathbf{\Phi}^* \cdot \mathbf{\Phi}\right|$, que dire du coefficient de transmission du polariseur ?

4) Que se passe-t-il si $\mathbf{\Phi}$ traverse deux polariseurs croisés, c'est-à-dire orientés de $\pi/2$ l'un par rapport à l'autre ?

• Partie 2 : Lames à faces parallèles I : la lame demi onde

Une *lame demi onde* est un matériau induisant un déphasage de π entre la composante orientée suivant son axe lent et celle orientée suivant son axe rapide. Typiquement, un tel matériau est demi onde uniquement pour une faible plage de longueurs d'onde donnée. Ici, il est sous-entendu que la lame est adaptée à la lumière monochromatique analysée. Nous supposons que l'axe rapide de la lame demi onde fait un angle θ avec l'axe de polarisation du champ incident $\mathbf{\Phi}$, et que ses axes lent et rapide sont orthogonaux.

5) Quel est l'état de polarisation de $\mathbf{\Phi}$ à la sortie de la lame ?

6) Que peut-on dire de la transmittance de la lame demi onde ?

7) Que se passe-t-il en sortie d'un circuit comprenant, dans l'ordre un polariseur, une lame demi onde inclinée de $\theta = \pi/4$ par rapport à l'axe rapide du polariseur, et d'un second polariseur d'axe rapide orthogonal au premier ?

8) Répondre à la même question si les deux polariseurs sont alignés.

• Partie 3 : Lames à faces parallèles II : la lame quart d'onde

Une *lame quart d'onde* est un matériau induisant un déphasage de $\pi/2$ entre la composante orientée suivant son axe lent et celle orientée suivant son axe rapide. Typiquement, un tel matériau est quart d'onde uniquement pour une faible plage de longueurs d'onde donnée. Ici, il est sous-entendu que la lame est adaptée à la lumière monochromatique analysée. Nous supposons que l'axe rapide de la lame quart d'onde fait un angle θ avec l'axe de polarisation du champ incident $\mathbf{\Phi}$, et que ses axes lent et rapide sont orthogonaux.

9) Quel est l'état de polarisation de $\mathbf{\Phi}$ à la sortie de la lame ?

10) Que se passe-t-il si l'axe rapide fait un angle de $\pi/2$ avec l'axe de polarisation du champ incident ?

11) Répondre à la même question si cet angle vaut $\pi/4$.

12) Quelle est la transmittance d'une telle lame ?

• Partie 4 : Application 1 : production d'une lumière de polarisation choisie

13) Remplir le tableau suivant :

	rectiligne	elliptique	circulaire
polariseur			
lame demi onde			
lame quart d'onde			

14) Comment transformer une lumière non polarisée en onde de polarisation rectiligne ?

15) Comment transformer une lumière non polarisée en onde de polarisation elliptique ?

16) Comment transformer une lumière non polarisée en onde de polarisation circulaire ?

• Partie 5 : Application 2 : analyse d'une lumière donnée

17) La lumière analysée s'éteint pour un angle donné de la direction d'un polariseur. Quel est sont état de polarisation ?

18) La lumière analysée produit une intensité uniforme en sortie de polariseur. Quel est son état de polarisation ?

19) La lumière analysée produit un minimum et un maximum en sortie de polariseur. Quel est son état de polarisation ? Que faire pour affiner la mesure ?

Exercice 3 : Mesure de la viscosité d'un solvant

Les propriétés mises en évidence dans les exercices précédents peuvent être mises à profit pour caractériser un matériau par exemple. Dans cet exercice, nous allons étudier la mesure de la viscosité d'un solvant en utilisant les propriétés de polarisation du champ électromagnétique.

Un ensemble de nanoparticules magnétiques sont mises en suspension dans le solvant étudié. Celles-ci sont traitées par un surfactant de manière à éviter qu'elles ne s'agrègent à cause de la force magnétique qu'elles exercent sur leurs voisines. Les billes sont suffisamment petites pour être considérées comme des dipôles magnétiques ponctuels.
L'échantillon est placé dans une cuve, entourée par une bobine qui, à un bon degré d'approximation, place l'échantillon dans un champ magnétique uniforme et constant. Ce champ va aligner les particules dans sa direction. Quand le champ est coupé, les dipôles des particules reprennent des valeurs aléatoires par agitation thermique, de sorte que l'échantillon n'est plus aimanté.
Cependant, les particules ne sont pas rigoureusement sphériques. Lorsqu'elles tournent sur elles-mêmes, elles subissent une force de frottement visqueux de la part du solvant. Ainsi, une mesure du retard à la réponse de l'échantillon aux variations du champ permet une mesure de sa viscosité.

Du fait de leur caractère anisotrope, les nanoparticules magnétiques n'interagissent pas de la même façon avec un champ électromagnétique extérieur suivant sa direction. Les fluctuations d'orientation des particules lorsque le champ magnétique dans lequel baigne l'échantillon est coupé entraînent une variation relative d'indice optique entre les axes lent et rapide de la forme :

$$\delta n = \delta n_0 e^{-t/\tau}\,, \tag{3}$$

où $\tau = \dfrac{4\pi\eta r^3}{k_B T}$, avec η la viscosité du solvant, r le rayon effectif des nanoparticules, k_B la constante de Boltzmann, et T la température.

1) Proposez un protocole de mesure de η.

2) L'échantillon est éclairé par un laser. Un polariseur est placé entre le laser et l'échantillon. Nous considèrerons que son inclinaison par rapport au plan horizontal est de $\pi/4$, le champ statique de la bobine étant orienté à un angle $\pi/2$ de ce même plan. Quel rôle joue le polariseur ?

3) Sachant que l'anisotropie de l'échantillon entraîne un déphasage $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} e\,\delta n$, où e est l'épaisseur de l'échantillon, entre les deux composantes du champ, en déduire l'expression du champ électrique du laser en sortie d'échantillon en fonction de sa transmittance T.

4) Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

5) Un deuxième polariseur, appelé analyseur, est placé après l'échantillon. Il est aligné à $3\pi/4$ du plan horizontal. Quel est le champ en sortie de l'analyseur ?

6) Donner l'expression de l'intensité moyenne mesurée par un capteur CCD en sortie de montage.

7) Sachant que l'anisotropie de forme des nanoparticules est très faible, en déduire que :

$$I \simeq I_0\, e^{-2t/\tau} \tag{4}$$

8) Application numérique : pour des billes de $r = 10$ nm de diamètre, une température de $T = 300$ K, le temps mesuré dans l'eau est $\tau_{eau} = 1\ \mu$s, et dans le glycérol $\tau_{glycerol} = 5$ ms. Quelles sont les viscosités respectives de ces deux liquides ?

TD3 : Propagation et réflexion

Exercice 1 : Propagation et conducteur ohmique

Soit une onde électromagnétique monochromatique se propageant dans le vide. Considérons que cette onde rencontre, en incidence normale, un conducteur ohmique de relation caractéristique $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$.

1) Rappeler les équations de Maxwell pour une onde plane monochromatique dans le vide. En déduire l'expression de **E** et **B** avant qu'ils rencontrent le conducteur.
2) Que se passe-t-il lorsque l'onde rencontre le conducteur ?
3) En utilisant la loi d'Ohm locale donnée plus haut, en déduire que l'onde électromagnétique dans le milieu Ohmique est évanescente.
4) Discuter de ce qui est observé lorsque l'épaisseur du conducteur varie.

Exercice 2 : Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

Un conducteur est dit parfait si sa conductivité σ est telle que $\sigma = +\infty$.

1) Que peut-on dire du champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur ?
2) Que se passe-t-il lorsque l'onde incidente rencontre le conducteur ?
3) Établir l'expression des champs électrique et magnétique dans le demi-plan ne contenant pas le conducteur.

Exercice 3 : Réflexion en incidence quelconque sur un conducteur parfait

Le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique incidente fait à présent un angle θ avec la normale au conducteur.

1) Établir l'expression du champ électromagnétique à l'extérieur du conducteur.
2) Comment peut-on caractériser une telle onde ?
3) Faire un schéma récapitulatif des situations des trois premiers exercices.

Exercice 4 : Application : Modes de propagation dans un guide d'onde à section rectangulaire (d'après *H-prepa, Électromagnétisme, 2ème année.*)

On souhaite déterminer la forme des ondes électromagnétiques se propageant dans un guide d'onde rectiligne, de génératrices parallèles à l'axe (Oz). Le métal constituant les parois du guide est assimilé à un conducteur parfait.

Le champ électromagnétique d'une onde guidée de pulsation ω est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}_1(x,y)\, e^{j(\omega t - kz)} \\ \mathbf{B}(x,y,z,t) &= \mathbf{B}_1(x,y)\, e^{j(\omega t - kz)} \end{aligned} \tag{1}$$

L'écriture $\Delta_t = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne l'opérateur « laplacien transverse » . Le vecteur $\mathbf{N} = N_x \cdot \mathbf{e}_x + N_y \cdot \mathbf{e}_y$ désigne un vecteur normal aux parois du guide. On note :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \tag{2}$$

Le cas $K = 0$ correspond à une mode dit « Transverse Électromagnétique » qui ne peut exister dans le guide d'onde. Il sera donc exclu.

• Partie 1 : Caractéristiques générales des ondes guidées

1) Rappeler les équations satisfaites par le champ électromagnétique dans le guide.
2) Préciser les conditions aux bords sur les parois du guide en faisant intervenir le vecteur $\mathbf{N}$.
3) À l'aide des équations de Maxwell, montrer que les composantes transverses E_{1x}, E_{1y}, B_{1x} et B_{1y} sont reliées aux composantes longitudinales E_{1z} et B_{1z} et leurs dérivées spatiales.
4) Quelles sont les équations satisfaites par E_{1z} et B_{1z} ?
5) Comment s'écrivent les conditions aux bords du guide pour ces deux composantes du champ électromagnétique ?
6) Justifier l'affirmation suivant laquelle une onde dans un tel guide est en général la superposition d'une onde dite « transverse électrique » (TE) et d'une onde « transverse magnétique » (TM) ?

On étudiera dorénavant les modes de propagation dans un guide à section rectangulaire, constitué de quatre parois métalliques d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ et $y = b$.

• Partie 2 : Modes TM

On peut, sans perte de généralité, chercher la composante longitudinale du champ électrique sous la forme d'une solution à variables séparées, soit :

$$E_{1z}(x,y) = F(x)G(y) \tag{3}$$

7) Montrer que les fonctions F et G sont nécessairement des fonctions oscillantes, dont les pulsations spatiales sont quantifiées (on notera m et n les nombres entiers intervenant dans cette quantification).
8) En déduire la forme du champ électromagnétique du mode $\mathrm{TM}_{m,n}$.
9) Quelle est la relation de dispersion de ce mode ?

10) Le guide peut-il contenir des excitations de fréquences arbitrairement basses ?

• Partie 3 : Modes TE

Nous supposons de même

$$B_{1z}(x,y) = f(x)g(y) \tag{4}$$

11) Reprendre les questions de la partie 2 pour ces modes.

12) Le guide d'onde est placé devant une petite antenne émettrice. Comment peut-on s'arranger pour n'exciter que le mode TE_{01} si l'on suppose $a < b$?

• Partie 4 : Propagation de l'énergie

Désormais, nous considérons le mode TM_{mn}.

13) Déterminer la densité volumique moyenne d'énergie $\langle e_{mn} \rangle$ associée à ce mode. La moyenne est une moyenne spatiale et temporelle à une altitude z fixée.

14) Déterminer la valeur moyenne du flux d'énergie à travers une section d'altitude z du guide.

15) Définir la vitesse de propagation de l'énergie associée à ce mode. L'exprimer en fonction de ω et $\omega_{c(m,n)}$, fréquence de coupure basse du mode (m,n).

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Les solutions de l'équation de d'Alembert sont :

- ☐ Des ondes progressives
- ☐ Des ondes stationnaires
- ☐ Des ondes ni progressives ni stationnaires
- ☐ Tous les choix ci-dessus sont possibles
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. Le principe de superposition peut être appliqué à l'équation de d'Alembert :

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

3. La propagation d'un méson π, particule du modèle standard responsable de l'interaction forte entre nucléons, est donnée par l'équation de Klein-Gordon : $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi$, où c est la vitesse de la lumière, m la masse du méson π, et $\hbar$ la constante de Planck réduite. Peut-on appliquer le principe de superposition aux solutions de cette équation ?

- ☐ Oui
- ☐ Non

4. Dans un cristal, les atomes sont disposés sur un réseau périodique. En réalité cependant, des défauts peuvent être présent dans cette structure à l'échelle microscopique. Cela peut expliquer par exemple la croissance de cristaux dans différentes directions à partir d'une base commune. Un modèle simple de ce phénomène a été proposé par Yakov Frenkel et Tatiana Kontorova. Dans ce modèle, la présence d'un défaut entraine une déformation de la matrice cristalline qui se propage suivant l'équation de sine-Gordon : $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \Delta\Psi + \sin(\Psi) = 0$. Peut-on appliquer le principe de superposition aux solutions de cette équation ?

- ☐ Oui
- ☐ Non

5. La superposition de deux ondes progressives contrapropageantes est toujours une onde stationnaire.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

6. Une onde stationnaire est une onde pour laquelle l'espace est le temps sont découplés.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

7. Tout signal périodique se décompose manière unique en série de Fourier.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

8. Tout signal périodique se décompose de manière unique par transformée de Fourier

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

9. Il est possible d'appliquer le principe de superposition à la transformation de Fourier.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

10. Les fronts d'ondes de chaque composante de Fourier d'une onde quelconque sont plans.

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

11. Toute onde admettant une transformée de

Fourier est monochromatique.

☐ Vrai

☐ Faux

12. Une onde électromagnétique progressive est monochromatique.

☐ Vrai

☐ Faux

13. Une onde électromagnétique stationnaire, somme de deux ondes progressives contrapropageantes de même amplitude est monochromatique.

☐ Vrai

☐ Faux

Questionnaire d'auto-évaluation

1. L'équation $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$ est :

   ☐ Toujours vraie
   ☐ Vraie seulement dans le vide
   ☐ Vraie seulement pour des ondes progressives
   ☐ Vraie seulement pour des ondes monochromatiques
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. L'équation $\mathrm{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ est :

   ☐ Toujours vraie
   ☐ Vraie seulement dans le vide
   ☐ Vraie seulement pour des ondes progressives
   ☐ Vraie seulement pour des ondes monochromatiques
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. L'équation $i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$ est :

   ☐ Toujours vraie
   ☐ Vraie seulement dans le vide
   ☐ Vraie seulement pour des ondes progressives
   ☐ Vraie seulement pour des ondes monochromatiques
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. L'équation $i\,\mathbf{k}\wedge\mathbf{B} = 0$ est :

   ☐ Toujours vraie
   ☐ Vraie seulement dans le vide
   ☐ Vraie seulement pour des ondes progressives
   ☐ Vraie seulement pour des ondes monochromatiques
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. L'équation $\mathbf{k}\wedge\mathbf{B} = \omega\,\mathbf{E}$ est :

   ☐ Toujours vraie
   ☐ Vraie seulement dans le vide
   ☐ Vraie seulement pour des ondes progressives
   ☐ Vraie seulement pour des ondes monochromatiques
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Si $\big(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\big)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\big(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\big)$ une solution pour une source 2, alors $\big(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\big)$ est solution des équations de Maxwell.

   ☐ Vrai
   ☐ Faux
   ☐ L'information donnée ne permet pas de conclure

7. Si $\big(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\big)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\big(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\big)$ une solution pour une source 2, alors $\big(\mathbf{E}_1 + 5\,\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 + 5\,\mathbf{B}_2\big)$ est solution des équations de Maxwell.

   ☐ Vrai
   ☐ Faux
   ☐ L'information donnée ne permet pas de conclure

8. Si $\big(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\big)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\big(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\big)$ une solution pour une source 2, alors $\big(\mathbf{E}_1 + 5\,\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 - 2\,\mathbf{B}_2\big)$ est solution des équations de Maxwell.

   ☐ Vrai
   ☐ Faux
   ☐ L'information donnée ne permet pas de conclure

9. Si $\big(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\big)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\big(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\big)$ une solution pour une source 2, alors $\big(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\big)$ est solution des équations de Maxwell.

☐ Vrai
☐ Faux
☐ L'information donnée ne permet pas de conclure

10. Les fronts d'ondes d'une superposition d'ondes planes sont plans.

☐ Vrai

☐ Faux

11. Les fronts d'ondes d'une superposition d'onde planes de vecteurs d'ondes colinéaires, ayant éventuellement des vecteurs d'ondes de sens opposés, sont plans.

☐ Vrai

☐ Faux

12. Si $\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\right)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\left(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\right)$ une solution pour une source 2, se propageant dans le vide avec des vecteurs d'onde respectifs $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, alors $i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$:

☐ Vrai

☐ Faux

13. Si $\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\right)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\left(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\right)$ une solution pour une source 2, se propageant dans le vide avec des vecteurs d'onde respectifs $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, alors $i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = 0$:

☐ Vrai

☐ Faux

14. Si $\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\right)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\left(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\right)$ une solution pour une source 2, se propageant dans le vide avec des vecteurs d'onde respectifs $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, alors $i\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{E}_1 + i\mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$:

☐ Vrai

☐ Faux

15. Si $\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\right)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\left(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\right)$ une solution pour une source 2, se propageant dans le vide avec des vecteurs d'onde respectifs $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, alors $i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \wedge (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}$:

☐ Vrai

☐ Faux

16. Si $\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1\right)$ est solution des équations de Maxwell pour une source 1, et $\left(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2\right)$ une solution pour une source 2, se propageant dans le vide avec des vecteurs d'onde respectifs $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, alors $2\, i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_1 - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$:

☐ Vrai

☐ Faux

Questionnaire d'auto-évaluation

Établir la nature de la polarisation des ondes suivantes :

1.

$$\Phi_x = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t)$$
$$\Phi_y = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

2.

$$\Phi_x = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t)$$
$$\Phi_y = \Phi \sin(k\,z - \omega\,t)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

3.

$$\Phi_x = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t)$$
$$\Phi_y = \Phi \sin(\omega\,t - k\,z)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

4.

$$\Phi_x = \Phi \sin(k\,z - \omega\,t)$$
$$\Phi_y = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

5.

$$\Phi_x = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t)$$
$$\Phi_y = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t + \pi/4)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

6.

$$\Phi_x = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t - \pi/4)$$
$$\Phi_y = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t + \pi/4)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

7.

$$\Phi_x = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t - \pi/2)$$
$$\Phi_y = \Phi \cos(k\,z - \omega\,t + \pi/2)$$

☐ elliptique
☐ circulaire
☐ rectiligne
☐ non polarisée

8.

$$\Phi_x = \Phi_1 \cos(k\,z - \omega\,t)$$
$$\Phi_y = \Phi_2 \cos(k\,z - \omega\,t)$$

- ☐ elliptique
- ☐ circulaire
- ☐ rectiligne
- ☐ non polarisée

9.

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi_1 \cos(k\,z - \omega\,t)\\ \Phi_y &= \Phi_2 \sin(k\,z - \omega\,t)\end{aligned}$$

- ☐ elliptique
- ☐ circulaire
- ☐ rectiligne
- ☐ non polarisée

10.

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi \cos(k\,z - \omega\,t + \pi/8)\\ \Phi_y &= \Phi \cos(k\,z - \omega\,t - 3\,\pi/8)\end{aligned}$$

- ☐ elliptique
- ☐ circulaire
- ☐ rectiligne
- ☐ non polarisée